

Título Análisis de errores en Álgebra y Geometría Analítica:
Dificultades en la apropiación del concepto de recta y plano

Tipo de Producto Ponencia completa

Autores Bravo Barletta, Virginia y Patiño Echeverrú, Juan

Publicado en: I Congreso Internacional de enseñanza de las Ciencias Básicas. Concordia, Entre Rios. Argentina

Código del Proyecto y Título del Proyecto

A15T04 - Análisis de errores en Álgebra y Geometría Analítica: Dificultades en la apropiación del concepto de recta y plano

Responsable del Proyecto

Bravo Barletta, Virginia

Línea

Didáctica en Matemática

Área Temática

MyS

Fecha

Agosto 2016

ANÁLISIS DE ERRORES EN ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA: DIFICULTADES EN LA APROPIACIÓN DEL CONCEPTO DE RECTA Y PLANO.

Bravo Barletta, Virginia Laura

Patiño Echeverría, Juan Carlos

Fundación Universidad Argentina de la Empresa
Lima 775, Ciudad de Buenos Aires, C1073AAO CABA, Argentina

vbravobarletta@uade.edu.ar

jpatino@uade.edu.ar

RESUMEN

El siguiente trabajo tiene por objetivo detectar y generar una taxonomía de los errores más frecuentes cometidos por nuestros alumnos al abordar el estudio de rectas y planos. La oportunidad de elaborar una taxonomía de errores propia, basada en nuestras experiencias, permitirá la posterior elaboración de una propuesta didáctica que permita la superación de las dificultades encontradas. La importancia del estudio radica en la necesidad de contar con una herramienta que nos brinde información sobre las dificultades de los alumnos en la apropiación de estos conceptos; conceptos, que desde nuestra perspectiva, tienen una importancia alta y a la vez un alto índice de equivocación durante la cursada en la materia Álgebra y Geometría Analítica, correspondiente al primer año de carreras de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Exactas de la Fundación Universidad Argentina de la Empresa. Para lograr el objetivo, se estudiaron 310 exámenes finales (modalidad previa y regular) tomados a lo largo de los años 2013, 2014 y 2015, agrupando los errores encontrados en un listado de 9 tipos de errores creado a partir de las experiencias previas y de las regularidades encontradas durante el presente estudio por parte de los investigadores.

Palabras clave: Errores, taxonomía, rectas y planos.

1. Introducción

Desde un punto de vista constructivista, el error es considerado como una herramienta fundamental para la construcción del conocimiento. Es por este motivo que se hace necesario reflexionar sobre el origen de estos errores, ya que en ellos se plasman las dificultades que tienen los alumnos para la apropiación de un concepto. Como expresa Rico (1995), “al cometer un error el alumno expresa el carácter incompleto de su conocimiento y permite a los compañeros o al profesor ayudarlo a completar el conocimiento adicional o llevarlo a comprender por sí mismo aquello que estaba mal”.

De acuerdo con investigaciones anteriores (Rosso, Barros. 2013), realizar un análisis sobre los errores más comunes de

nuestros alumnos, permitiría proponer en un siguiente trabajo, una propuesta didáctica acorde que tenga en cuenta las dificultades encontradas. Es por este motivo, y preocupados por la tasa de equivocaciones encontrada en los exámenes finales de Álgebra y Geometría Analítica en los temas referidos a rectas y planos, que nos propusimos analizar en detalle el tipo de errores cometido por nuestros alumnos; con la idea de que al realizar un estudio exhaustivo pudiésemos tener respuestas que nos permitan lograr una mejora en la apropiación de estos conceptos en la materia.

En estudios anteriores, como los de Abrate, Pochulu y Vargas (2006, p. 139), los errores realizados por los alumnos pueden resumirse en un 72% en el siguiente tipo de errores:

- Errores debidos a inferencias o asociaciones incorrectas, generados por la aplicación de reglas y propiedades justificadas en esquemas similares, o por inferirse que son válidas en contextos parecidos o relacionados.

- Errores debidos a dificultades para obtener información espacial, atribuidos a deficiencias en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales, que llevan a interpretaciones incorrectas de información o hechos matemáticos.

- Errores debidos a la ausencia de conocimientos previos, causados por la carencia de aprendizajes relativos a hechos, destrezas y conceptos, que inhiben totalmente el procesamiento de la información e impiden dar una respuesta a la situación.

Si bien esta clasificación general estudiada por Abrate, Pochulu & Vargas, aborda de manera general el tipo de errores que se encuentran en el estudio de la matemática, sentíamos una necesidad de generar una clasificación mucho más particular y cercana a nuestro caso. Es decir, una clasificación que reflejara con mayor precisión el tipo de errores cometido por nuestros alumnos en los temas referidos a rectas y planos.

2. Marco Teórico

Clasificaciones de errores en matemática

Los primeros estudios realizados sobre el análisis de errores en matemática se remontan a las primeras décadas del siglo XX. Uno de los primeros trabajos es el de Smith, quien hace una recopilación de algunos errores en demostraciones de geometría de alumnos de escuela secundaria en los Estados Unidos (Cury, 1994). (Citado por Abrate, R.; Pochulu, M. y Vargas, J).

Por esta época, Weiner, quien es considerado el fundador de la investigación didáctica orientada al estudio de errores, muestra algunos de sus trabajos, como explica Rico (1995)

A partir de los años 50, ocurre una segunda fase en la investigación del análisis de errores, y viene de la mano con la nueva concepción del procesamiento de la información. Sobre esta concepción, muchos investigadores utilizaban técnicas en las cuales pedían a sus alumnos solucionar problemas en “voz alta”, y a través de ciertos protocolos, se analizaban las estrategias (erróneas o no) utilizadas por los estudiantes para hallar la solución al problema. Resulta bastante interesante este método, ya que al aplicarlo, se puede dar cuenta del proceso lógico que utiliza el alumno al momento de intentar solucionar un ejercicio, y también el momento justo en el que comete un error.

Hasta ese momento, todas las investigaciones relacionadas con el análisis de errores, tenían algo en común: actuar como diagnósticos. Los investigadores se preocupaban por dar al profesor una clasificación de los errores cometidos por los alumnos para que éste, luego, aplicara metodologías de enseñanza reparadoras y pudiera subsanar las fallas de los alumnos. Según Abrate, Pochulu y Vargas (2006), esto termina reforzando una visión absolutista de la matemática, en la cual existe una verdad absoluta a la que se debe llegar evitando los errores.

Cury, hace una crítica sobre esta forma de estudiar al error, en pos de la eficiencia y en detrimento de la comprensión.

A partir de los años 60 y debido al ingreso de Piaget en el panorama, el estudio del error tuvo una visión más constructivista, en tanto se estimula su ocurrencia puesto que brinda posibilidades para el sujeto constructor de conocimiento.

Rico (1995) hace cuenta que hasta ese momento, los estudios sobre errores consistían en recuentos sobre el número de soluciones correctas e incorrectas realizados por los alumnos ante algún cuestionario y un intento de clasificación de estos errores para luego proceder a determinar cómo surge el

error o qué factores pudieron haber conducido a ellos.

Radatz (1980). (Citado por Abrate, R.; Pochulu, M. y Vargas, J), hace una importante revisión de todas las investigaciones realizadas tanto en Europa como en Estados Unidos sobre el análisis de errores hasta finales de los años 70. En ella se rescatan algunos datos importantes:

- La Aritmética constituye el área de contenidos dominante en la mayor parte de los estudios sobre errores.
- Los desarrollos teóricos en análisis de errores muestran cierta continuidad en Estados Unidos, mientras que en los países europeos las producciones han sido esporádicas y carecen de continuidad en el tiempo hasta fechas muy recientes.
- Existe una pluralidad de aproximaciones teóricas e intentos de explicación de las causas de los errores.

Luego viene un estudio mucho más amplio de Borasi, en el que no solamente considera el error en un entorno limitado a la clasificación, sino con el interés de ir un poco más allá, y utilizar el análisis de errores para entender el funcionamiento de la mente. Los errores son analizados entonces para dos propósitos fundamentales: para eliminarlos o para estudiar sus potencialidades.

Abrate, Pochulu y Vargas (2006) explican la posición de Borasi de la siguiente manera: *“Si el foco de interés es el contenido técnico-matemático del error y queremos eliminarlo, procuraremos diagnosticar sus causas pues representa una falla del proceso; si pretendemos explorarlo, el error será considerado un estadio necesario en el proceso de aprendizaje puesto que puede llevar a nuevos descubrimientos en Matemática.*

Si nos centramos en la naturaleza de la Matemática, la eliminación del error estará ligada al entendimiento de la incomprensión del alumno sobre el concepto presentado y en retomar el tema con nuevos enfoques; si pretendemos explorar el error, este nos puede

llevar a la reflexión sobre los límites y características de la propia Matemática.

Si estamos interesados en el proceso de aprendizaje de la Matemática, el error puede ser visto como instrumento de identificación de los problemas del currículo o de la metodología de enseñanza, y al analizarlos, podrán ser eliminados; si, por otro lado, queremos explorar el error, éste puede constituirse en un instrumento para la comprensión de los procesos cognitivos de los alumnos.”

En esta medida Borasi, no sólo hace un recorrido y clasificación de los errores realizados por los alumnos, sino que lo usa como herramienta didáctica para la comprensión de contenidos matemáticos, utilizando una visión constructivista del error.

Lo que se puede apreciar luego de hacer una revisión bibliográfica sobre el análisis de errores en matemática, es que el tipo de estudios se divide principalmente en dos enfoques: por un lado el enfoque diagnóstico/reparador, en el que se pretende eliminar los errores, enmarcado generalmente en un enfoque conductista y de procesamiento de información; Y por otro lado, el enfoque constructivista en el que se exploran las potencialidades del error como herramienta generadora de conocimiento.

3. Desarrollo Del Trabajo

El estudio realizado es de tipo diagnóstico-descriptivo, se pretendió hacer un análisis y una categorización de los errores cometidos en los exámenes finales (previos y regulares) por los alumnos de la materia Álgebra y Geometría Analítica particularmente referidos al tema de rectas y planos.

El análisis fue realizado a partir de 16 exámenes tomados a lo largo de los años 2013, 2014 y 2015 a 310 alumnos, de la materia Álgebra y Geometría Analítica que se ubica en los primeros años de todas las carreras de ingeniería o licenciatura de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Exactas de la Fundación

Universidad Argentina de la Empresa (UADE).

En un principio, se hizo una selección sobre los ejercicios referidos específicamente al tema de nuestro interés (rectas y planos), y una vez seleccionados, revisamos las respuestas de los alumnos. Luego de recopilar todas las respuestas, de hacer una revisión bibliográfica de las taxonomías de errores existentes y de una puesta en común sobre las percepciones propias que notábamos en la corrección de los exámenes, elaboramos una tabla que nos permitía de manera práctica agrupar los errores que cumplían determinada característica, lo cual nos llevó a la realización de la siguiente categorización de errores.

3.1. Errores vinculados a errores de cuentas. (E1).

Dentro de este grupo, se encuentran errores cometidos por el olvido de algún signo en alguna expresión, de transcribir mal el enunciado a la resolución, y de todos los errores que estos descuidos podrían causar en la resolución de un ejercicio.

Ejemplo tomado de examen:

Hallar la distancia entre el punto $N = (0,4,1)$ y el complemento ortogonal del subespacio $S = \text{gen}\{(1,0,2), (1,1,6)\}$

b) El complemento ortogonal al subespacio será como recta que pasa por el origen en \mathbb{R}^3 . Como es \perp a π el $V_0 = K(\vec{n})$

$\therefore S^\perp = \text{gen}\{(-2, -4, 1)\}$

$N \cdot N_0 = 0 \quad N' = (-2\lambda, -4\lambda, \lambda)$

$(-2\lambda, -4\lambda, \lambda) \cdot (-2, -4, 1) = 0$

$4\lambda + 16\lambda - 16 + \lambda - 1 = 0$

$21\lambda = 17$

$\lambda = \frac{17}{21}$

$N' = \left(-\frac{34}{21}, -\frac{68}{21}, \frac{17}{21}\right)$

$\vec{NN'} = \left(-\frac{34}{21}, -\frac{16}{21}, \frac{32}{21}\right)$

$d(N; S^\perp) = \sqrt{\frac{136}{21}}$

La distancia de S^\perp al punto N es $\sqrt{\frac{136}{21}}$

Figura 1. Error de cuenta.

3.2. Errores vinculados a ejercicios incompletos, desarrollados a la mitad o hasta cierto instante. (E2).

En este grupo se encuentran los errores en los que el alumno no culmina un ejercicio y

por lo tanto no contesta a la consigna pedida, pero durante el procedimiento realizado no comete otro tipo de error.

Ejemplo tomado de examen:

Hallar la distancia entre el punto $N = (0,4,1)$ y el complemento ortogonal del subespacio $S = \text{gen}\{(1,0,2), (1,1,6)\}$

b) ② $(x, y, z) \cdot (1, 0, 2) = 0 \quad (x, y, z) \cdot (1, 1, 6) = 0$

$x = -2z$

$x + y + 6z = 0$

$-2z + y + 6z = 0$

$y + 4z = 0$

$y = -4z$

$S^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = -2z, y = -4z\}$

$(-2z, -4z, z) = z \cdot (-2, -4, 1)$

$S^\perp = \text{gen}\{(-2, -4, 1)\}$

\Rightarrow Bona $S^\perp = \{(-2, -4, 1)\}$

no resuelve

Figura 2. Error de ejercicio incompleto. Encuentra la proyección pero no calcula la distancia.

3.3. Errores vinculados a resolución correcta de procedimientos pero con información no correcta, (no tiene lógica de dónde sacan cierta información). (E3).

En este grupo se engloban los errores en los que el alumno manifiesta capacidad de aplicar procedimientos algebraicos (factorización, resolución de sistemas, producto vectorial o escalar entre vectores, etc), pero los aplica en datos no relevantes a los solicitados.

Ejemplo tomado de examen:

Dada la recta r de ecuación vectorial $\vec{X} = (2,1,1) + t(1,2,-3), t \in \mathbb{R}$, y los puntos $M = (2,0,2)$ y $N = (4,0,1)$.

- (a) Hallar la ecuación cartesiana del plano π que contiene a la recta r y al punto M . Graficar.

a) $A = (2, 1, 1)$ (punto de la recta contenido en el plano)
 $\vec{AM} = (0, -1, 1)$ N no tiene nada que ver
 $\vec{AN} = (2, 1, 0)$ \vec{AN}
 $\vec{AN} \times \vec{AM} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \hat{i} - \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \hat{j} + \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \hat{k}$
 $= (0 - (-1), -2, -(-2)) = (1; -2; 2)$
 $\pi: x - 2y + 2z + D = 0$
 $1 - 2(-1) + 2(1) + D = 0$
 $D = -9 \Rightarrow \pi: x - 2y + 2z - 9 = 0$

Figura 3. Error al utilizar información no pertinente.

3.4. Errores vinculados a la falta de conocimiento para abstraer información o buscar información de los enunciados. (E4).

Estos errores aparecen cuando el alumno es consciente de los procedimientos que tiene que desarrollar, pero no logra obtener los datos del enunciado o de otra fuente para solucionar el ejercicio.

Ejemplo tomado de examen:

Dada la recta: r , determinada por la intersección de los planos $\alpha: -x + 2y = 0$ y $\beta: x - 2y + 2z = 2$. Y la recta s , que pasa por los puntos $A = (-1, 1, -2)$ y $B = (-3, -3, 4)$

Hallar la distancia del punto A a la recta s .

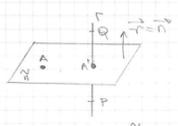
b) $A = (-1, 1, -2)$ $s: \lambda(2, 4, -6) + (-1, 1, 2)$
 $\begin{cases} x = 2\lambda - 1 \\ y = 4\lambda + 1 \\ z = -6\lambda + 2 \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$
 Verificar que el punto A no es de la recta

 $2x + 4y - 6z + d = 0$
 $2(-1) + 4(1) - 6(-2) + d = 0$
 $14 + d = 0$
 $d = -14$
 $2x + 4y - 6z - 14 = 0$

Figura 4. Error asociado a la falta de abstracción de información del enunciado. El alumno no interpreta que el punto A está sobre la recta s , por lo tanto la distancia entre ellos es cero.

3.5. Errores vinculados a desconocimiento del tema. (E5).

Son errores en los que se manifiesta pleno desconocimiento de los procedimientos, o de los conceptos para solucionar el ejercicio. A su vez incluye errores en los que la

respuesta del alumno manifiesta claramente una incoherencia con los aspectos teóricos del tema.

3.6. Errores vinculados a la forma de presentar las respuestas. (E6).

Dentro de este grupo se encuentran los errores en los que el alumno presenta incorrectamente la respuesta en términos de notación.

3.7. Errores vinculados a incoherencias o mezcla de conceptos sin sentido. (E7).

Estos son aquellos errores en los que el alumno muestra conocimiento de algunos conceptos pero no el vínculo entre sí, generando una mezcla de conceptos sin sentido para la realización del ejercicio.

3.8. Errores vinculados a falta de conocimientos sobre procedimientos algebraicos para desarrollar ejercicios. (E8).

Se incluyen en este grupo los errores en los que el alumno manifiesta el conocimiento sobre la forma de proceder para solucionar un ejercicio, pero queda limitado ante la necesidad de aplicar un procedimiento algebraico más básico (factorización, resolución de sistemas lineales, etc.)

3.9. Errores vinculados a la afirmación (o asimilación como verdaderas) de conceptos erróneos. (E9).

Dentro de este grupo se encuentran los errores en los que los alumnos dan como verdaderas propiedades que son falsas. Por ejemplo en algunos casos extrapolan conceptos previos y los dan por verdaderos en otros conceptos. No vinculan o renuevan con los nuevos conceptos adquiridos.

Un caso típico de este tipo de error encontrado en los exámenes es que al preguntárseles sobre la intersección entre dos rectas en el espacio y al obtener que no existe intersección entre éstas, afirman que las rectas son paralelas, sin considerar que podrían ser alabeadas.

4. Discusión

En cuanto a los errores más frecuentes que fueron los de tipo E1, E3 y E5, queremos realizar algunas observaciones: Los errores de tipo E1 (errores vinculados a errores de cuentas) podríamos considerarlos de Importancia baja, dado que pueden ser superados mediante un trabajo consciente por parte del alumno. Si bien su frecuencia es alta, no son tan relevantes para nosotros en cuanto a los objetivos del presente trabajo, dado que consideramos más importantes los errores vinculados a los conceptos de rectas y planos. En especial cuando este tipo de errores no modifica lo central del ejercicio y la resolución fue coherente.

Adjudicamos a los errores de tipo E3 y E5 una importancia alta ya que para lograr la superación del error se requiere una intervención más alta por parte del profesor y un trabajo conjunto entre éste y el alumno. En este tipo de errores se manifiesta una ausencia de contenidos teóricos y conceptuales alta. Y son, por tanto, los errores que pueden llevar a generar fracaso en el alumno.

Aunque menos frecuentes, atribuimos a los errores de tipo E4, E7, E8 y E9 una importancia alta ya que la tarea de obtener la información necesaria y pertinente del enunciado para la resolución del ejercicio, la vinculación entre conceptos, la falta de herramientas algebraicas y extrapolación de propiedades válidas en ciertos contextos a los nuevos contextos en estudio donde no necesariamente son válidas, requieren de una intervención más activa por parte del docente.

Los errores de tipo E2 y E6 tienen una importancia media dado que su superación requiere por parte del alumno una mayor cantidad de resolución de ejercicios, una revisión de ciertos conceptos teóricos, una lectura profunda de las consignas y especial atención a la presentación de las respuestas. Este trabajo no descarta la intervención del docente.

Teniendo en cuenta lo anterior, se ha pensado para ésta (o para tener en cuenta en

investigaciones similares futuras), otorgar una ponderación determinada a cada tipo de error, para poder analizar entonces la vinculación que existe entre la cantidad de veces que se comete determinado error y el peso de importancia que tiene este error.

La categorización de errores elaborada nos brinda información relevante sobre los errores más frecuentes cometidos por nuestros alumnos para la elaboración, en una segunda etapa, de una propuesta didáctica que los tome como punto de apoyo/partida. Además, sugieren la necesidad de un trabajo del docente con los alumnos en la lectura y comprensión de enunciados, atendiendo a qué se espera como una respuesta aceptable, poniendo énfasis en la notación (en especial cuando un pequeño cambio en la notación implique un cambio conceptual importante) y en la vinculación entre lo analítico y lo geométrico.

5. Conclusión

El estudio realizado sobre los errores referentes al tema de rectas y planos cometidos por los alumnos en los exámenes finales, nos permitió la elaboración de una taxonomía propia con la que hasta el momento no se contaba para nuestra institución. Es de gran importancia para nosotros contar con una herramienta que nos permita analizar la forma en que se equivocan nuestros estudiantes para de esta manera crear propuestas didácticas acordes a las dificultades encontradas. La elaboración de la taxonomía, nos permite también abrir la puerta a futuras investigaciones sobre errores en otras áreas de la matemática y la posible vinculación o semejanza que puedan existir entre ellas.

Encontramos también dificultades a lo largo del estudio realizado dada la complejidad de clasificar algunos errores en ciertas categorías, si bien la clasificación se realizó basándonos en la experiencia propia como docentes y en algunas investigaciones ya realizadas, la discusión sobre la

pertinencia o no de algunas categorías de errores queda abierta a futuras investigaciones.

6. Referencias

- [1] Abrate, R.; Pochulu, M. y Vargas, J. Errores y dificultades en Matemática Análisis de causas y sugerencias de trabajo 1^a ed. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María, 2006.
- [2] Di Blasi Regner, M. y Otros (2003). Dificultades y Errores: Un estudio de caso. Comunicación breve presentada en el II Congreso Internacional de Matemática Aplicada a la Ingeniería y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería (Buenos Aires, Diciembre 2003).
- [3] Radatz, H. (1980). Student's errors in the mathematics learning process: A Survey. For the Learning of Mathematics. Vol 1 (1).
- [4] Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. En Kilpatrick, J.; Rico, L. y Gómez, P. Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica. México.