

Título Dificultades Algebraicas y su influencia en el Aprendizaje de Función. Una mirada según las dimensiones del conocimiento

Tipo de Producto Ponencia completa

Autores Álvarez, Flavia; Benítez, Natalia; Bolivar, María Julia; Hollisch, Gisele

Publicado en: II Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias Básicas. Salto, Uruguay

Código del Proyecto y Título del Proyecto

C17T01 - Análisis Epistemográfico sobre el rol de las dificultades algebraicas ligadas al estudio de funciones en primer año de la universidad

Responsable del Proyecto

Natalia Soledad Benítez

Línea

Didáctica en Matemática

Área Temática

TIC

Fecha

Septiembre 2017

DIFICULTADES ALGEBRAICAS Y SU INFLUENCIA EN EL APRENDIZAJE DE FUNCIÓN

Una mirada según las dimensiones del conocimiento

**Alvarez,
Flavia Valeria**
falvarez@uade.e
du.ar

**Benítez, Natalia
Soledad**
nabenitez@uade.e
du.ar

**Bolívar, María
Julia**
mjuliabolivar@gmail.c
om.ar

Hollisch, Gisele
ghollisch@uade.e
du.ar

Universidad Argentina de la Empresa
C1073AAO Lima 775 Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina

Eje temático 1: La interdisciplina en la enseñanza de las Ciencias Básicas en los diferentes niveles del sistema educativo.

Resumen

El presente artículo muestra cómo fueron analizados los errores de naturaleza algebraica cometidos por alumnos de la materia Matemática Empresarial I de la Universidad Argentina de la Empresa al intentar resolver ejercicios referidos al tema función. La investigación es una continuación del trabajo realizado en la tesis de la Mg. Natalia Benítez. Para realizar este estudio se utilizó como marco teórico el Análisis Epistemográfico desarrollado por Drouhard (2014). Los resultados descriptos forman parte de la segunda etapa del proyecto de investigación: “Análisis Epistemográfico sobre el rol de las dificultades algebraicas ligadas al estudio de funciones en primer año de la Universidad”. En esta oportunidad realizamos un análisis de los errores cometidos por cada alumno al resolver un ejercicio del primer parcial tomando en cuenta solamente los errores de naturaleza algebraica. Para ello efectuamos una descripción detallada de cada uno de estos errores atendiendo a las dimensiones del conocimiento que menciona Drouhard.

El estudio realizado nos permitió observar que las dificultades relacionadas con conocimientos instrumentales aparecen como un primer obstáculo. Parecería que una vez que se superan éstas el alumno puede evitar ciertos errores pero se enfrenta a otros relacionados con las nociones, como son las definiciones y propiedades de los objetos matemáticos y; más generalmente, a cómo los objetos matemáticos están relacionados entre sí.

Palabras clave: Análisis Epistemográfico, dificultades algebraicas, funciones.

1. Introducción

Actualmente, en las clases de primer año de la Universidad, encontramos que los alumnos tienen muchas dificultades para abordar los temas referidos a funciones. Parecería que, son las dificultades relacionadas con el trabajo algebraico las que les impiden avanzar hacia los conceptos y actividades desarrolladas en torno al tema.

Al igual que en las otras investigaciones de las cuales deriva nuestro trabajo seleccionamos el tema función para analizar dichas dificultades algebraicas debido a que se trata, por un lado, del primer tema de Análisis Matemático que deben abordar los estudiantes en Matemática de primer año. Por otro lado, pensamos que tener

conocimiento acerca de la relación existente entre los errores de naturaleza algebraica de los alumnos y la comprensión de los conceptos referidos a funciones puede aportar elementos para re-organizar una enseñanza que ayude a sortear estas dificultades (Benitez et al, 2016).

El presente trabajo forma parte del proyecto de investigación: “Análisis Epistemográfico sobre el rol de las dificultades algebraicas ligadas al estudio de funciones en primer año de la Universidad”. Constituye una continuación del trabajo de tesis de la Mg. Natalia Benítez en el que se presentó un análisis detallado de los errores que cometieron estudiantes de primer año al intentar resolver ejercicios sobre funciones en la materia Matemática I de la Universidad Argentina de la Empresa (UADE). El objetivo fue analizar si las dificultades algebraicas con que ingresaban estos alumnos a la universidad tenían influencia (y si la tenían, en qué medida) en sus desempeños. Para hacerlo se utilizó como marco teórico el Análisis Epistemográfico (Drouhard, 2014).

En el momento de realización de la tesis no formaban parte de los contenidos de la materia cuestiones relativas al trabajo algebraico, mientras que, actualmente estos contenidos constituyen la primera unidad del programa y la segunda unidad trata sobre el tema función. Con estos cambios, el desafío de la investigación es realizar un análisis similar al efectuado en dicha oportunidad considerando la organización actual de la materia.

En la primera fase del proyecto estudiamos los errores que cometieron los estudiantes de la materia Matemática Empresarial I al intentar resolver ejercicios sobre funciones, localizándolos en las distintas capas de análisis mencionadas en la Epistemografía, y distinguiendo a su vez entre errores de naturaleza algebraica y no algebraica.

Como una primera aproximación se concluyó que las dificultades algebraicas constituyen un aspecto clave a ser considerado por los docentes en el momento de pensar la enseñanza del tema función.

En esta oportunidad presentaremos los resultados obtenidos en la segunda etapa de la investigación, en la que efectuamos un análisis por alumno tomando en cuenta solamente los errores de naturaleza algebraica.

Como menciona Drouhard (2013):

En Didáctica de la Matemática es pertinente estudiar la naturaleza de los saberes debido a que conocer conceptos matemáticos, manejar los distintos sistemas de representación semiótica de los mismos, utilizar recursos tanto conceptuales como semióticos para resolver prácticamente problemas, conocer, y aceptar de seguir, las reglas que rigen la actividad matemática, se aprende – y por consecuencia, se enseña – de maneras muy diferentes.

Los docentes de matemática al dar clases podrían estar privilegiando en los alumnos el desarrollo de algunos saberes correspondientes a ciertas dimensiones de los conocimientos (tratadas en la Epistemografía) y desalentando otras. El análisis realizado en nuestro trabajo es un importante aporte para ayudar a los docentes a identificar cuáles son los puntos flojos de sus alumnos.

Ser conscientes de los conocimientos involucrados en las tareas matemáticas de los estudiantes al inicio de la universidad nos ayuda también al momento de hacer propuestas curriculares nuevas y nos permite evaluar las propuestas de cambio en la enseñanza de la matemática en este nivel educativo.

2. Marco Teórico

Nos interesa el estudio de errores porque como mencionan Abrate et al. (2006):

“El análisis de los errores sirve para ayudar al docente a organizar estrategias para un mejor aprendizaje insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades y contribuye a una mejor preparación de instancias de corrección”.

Creemos que, como señalan en su trabajo Del Puerto et al. (2004), el análisis de los errores cometidos por los alumnos en su proceso de aprendizaje provee una rica información acerca de cómo se construye el conocimiento matemático y, al mismo tiempo, constituye una excelente herramienta para realimentar el proceso de enseñanza-aprendizaje con el fin de mejorar los resultados.

Haciendo foco en el aprendizaje y el manejo de las técnicas que menciona Sessa (2005) y en las ideas de Kieran (2004) para nuestra investigación definimos la actividad algebraica como el uso de instrumentos algebraicos para operar sobre objetos considerados desde el punto de vista algebraico o reducidos a su dimensión algebraica. La “actividad algebraica ligada al estudio de funciones” sería, en este sentido, una actividad basada en el uso de instrumentos algebraicos para operar sobre funciones. Es decir, una actividad matemática que se caracteriza por el empleo de herramientas algebraicas para la resolución de problemas analíticos. La misma incluye acciones como: saber factorizar, desarrollar, simplificar, operar y trabajar con expresiones equivalentes.

Para realizar un trabajo adecuado sobre funciones los alumnos deben dominar todas estas acciones de lo contrario podrían convertirse en un obstáculo.

Como señalamos anteriormente, para realizar este estudio elegimos analizar el trabajo de los alumnos utilizando la división en capas de análisis del trabajo matemático y la categorización utilizada en el Análisis Epistemográfico (Drouhard, 2013), la cual fue desarrollada para la organización de los conocimientos científicos. Esta elección surge a partir de la necesidad de categorías de análisis más finas que “dificultades ligadas al trabajo algebraico” o “dificultades no ligadas al trabajo algebraico”.

Según Drouhard (2014) la actividad matemática de los alumnos puede ser analizada desde cinco “capas”. Estas son: la capa del Contrato Pedagógico (capa CP), la capa del Contrato Didáctico (capa CD), la capa de Matematización y Modelización (capa MyM), la capa de los Discursos y del Razonamiento (capa DyR) y la capa de los Objetos de Saber y las Operaciones (capa OSO).

Al mismo tiempo Drouhard (2014) distingue dos tipos de saberes: los relativos a *objetos* (función lineal, gráfico de una función, ecuación, etc.), y los relativos a las “*reglas del juego matemático*” (las soluciones obtenidas por cálculo deben ser exactas, las sacadas de una resolución gráfica tienen un cierto grado de aproximación, etc.).

El Análisis Epistemográfico considera que los saberes relativos a los “objetos matemáticos” se sitúan en un espacio de tres dimensiones principales: Nocial, Semio-lingüística e Instrumental.

Conocer un objeto matemático equivale a conocerlo en cada dimensión.

En la *dimensión Nocial* de los objetos se encuentran los saberes relativos a las definiciones y propiedades de los objetos matemáticos y, más generalmente, a cómo los objetos matemáticos están relacionados entre sí.

En la *dimensión Semio-lingüística* se hallan, por un lado, los saberes relacionados con el funcionamiento de todo el sistema de representación semiótico, en particular, su semántica, es decir, la relación entre las representaciones y los objetos matemáticos. También encontramos en esta dimensión los saberes relativos a la representación de los objetos matemáticos particulares del dominio. Necesitamos aprender los saberes de esta

dimensión para leer, interpretar, escribir, dibujar, entender, procesar representaciones (escrituras, esquemas, gráficos, etc.) de los objetos de saber.

La *dimensión Instrumental* incluye saberes relativos a cómo se usan los instrumentos, en qué medida vale la pena o no usarlos, o cuáles son los costos y beneficios de hacerlo. Es decir que esta dimensión trata sobre el “cómo hacer”, sobre las diferentes formas de hacer algo, las ventajas y los inconvenientes de usar tal o cual manera para hacer.

Los saberes relativos a las “Reglas del juego Matemático” tienen que ver con conocer las “reglas del juego”. Éstas son las que rigen la validez lógica de los razonamientos, la aceptabilidad de las representaciones semióticas, el uso legítimo de los instrumentos, etc. Los saberes relativos a las reglas del juego matemático tratan sobre lo permitido y lo prohibido, a diferencia de los saberes instrumentales que tratan sobre lo posible y lo imposible (o lo fácil y difícil).

Además, es preciso saber nombrar, e identificar las cosas (objetos, operaciones, reglas del juego), como por ejemplo fracción, numerador, denominador, etc.

3. Campo y Metodología

En esta etapa de la investigación realizamos un análisis por examen (es decir por alumno), tomando en cuenta únicamente aquellos errores que fueron localizados en la fase anterior de la investigación en la capa de los objetos de saber y las operaciones (OSO) y que tienen origen algebraico, representando éstos un 36% del total de las dificultades encontradas.

Consideramos una muestra integrada por 79 alumnos pertenecientes a tres cursos de la materia Matemática Empresarial I que cursaron durante el primer cuatrimestre del año 2016. Analizamos la resolución de un ejercicio del primer parcial referido al tema función.

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x) = \frac{\sqrt{-\frac{2}{3}(x+1)+2}}{x+2}$$

a. Determinar el conjunto A, dominio de la función.
b. Hallar analíticamente el conjunto de ceros de la función f.
c. Hallar el conjunto solución de la ecuación $f(x) = 1$.

Fig 1. Ejercicio considerado para este trabajo

Realizamos una descripción detallada de cada uno de los errores cometidos por los estudiantes e identificamos en qué dimensión del conocimiento mencionada en la Epistemografía tuvo dificultades el alumno al cometer dicho error.

La información sobre la localización de los errores en las dimensiones del conocimiento fue expresada en nuevas tablas (una para cada alumno).

Ítem	Capa OSO (si el ítem requiere contar con conocimientos algebraicos en esta capa de análisis)			El alumno presenta deficiencias en los saberes relativos a las reglas del Juego	El alumno comete errores correspondientes a capas de análisis que no involucran nociones algebraicas	El alumno no comete errores
	Dimensiones de los saberes relativos a los objetos matemáticos en que el alumno presenta dificultades	Nocional	Semio-lingüística			
I			X(no invierte el signo de la desigualdad)		X (DyR)	
Ii					X (OSO)	
Iii	X (desconoce que al elevar al cuadrado no se mantiene la equivalencia de ecuaciones)	X(factoriza mal la cuadrática, no tiene en cuenta el coeficiente a, parece una distracción)			X (DyR) X (error de cuenta, OSO)	

Fig 2. Ejemplo de análisis por alumno

Cabe aclarar que, si bien algunos errores podrían ser ubicados en más de una dimensión, para este estudio hemos decidido localizar cada error en una sola de estas considerando para ello la dimensión predominante. Esta dimensión la hemos determinado a través de discusiones entre los integrantes del equipo basándonos en el enfoque que se le dio a los temas en los cursos analizados.

Además pudimos detectar cuando un error era de distracción observando si en situaciones similares el alumno lo repetía o bien si se trataba de un hecho aislado. En este sentido, hemos decidido localizar los errores de distracción en la dimensión semiolinguística dado que, en este tipo de errores, hay una dificultad de orden semántico.

4. Resultados

Luego de confeccionar las tablas de la Fig. 2 para cada alumno y considerando únicamente las dificultades de origen algebraico contabilizamos cuántas se localizaron en cada dimensión del conocimiento. En una primera instancia incluimos los errores de distracción en la dimensión semiolinguística. Al encontrarnos que, de las 21 dificultades incluidas en esta categoría, 15 fueron de distracción (71% de las dificultades semiolinguísticas) decidimos no considerarlas al momento de expresar los resultados.

El siguiente gráfico muestra los resultados obtenidos:

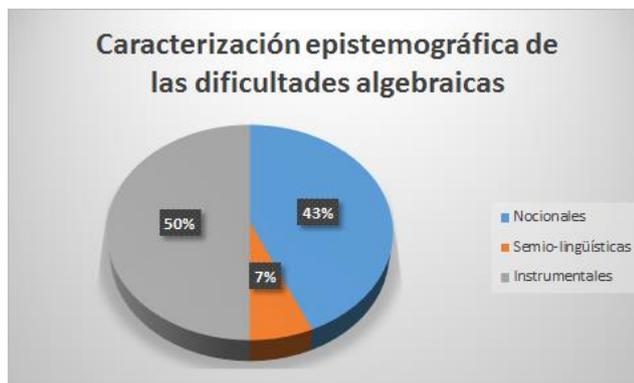


Fig 3. Distribución porcentual de las dificultades encontradas

Podemos observar que el mayor porcentaje de dificultades es de carácter instrumental, luego le siguen las dificultades nocionales y por último las semiolinguísticas.

4.1 Distinción entre alumnos aprobados y desaprobados

De los 79 alumnos de la muestra el 42 % ha desaprobado el examen con calificación inferior a cuatro, mientras que el 58 % de los estudiantes obtuvo una calificación igual o superior a cuatro, aprobando de este modo la evaluación.

Los porcentajes de dificultades algebraicas que tuvieron los alumnos aprobados y los desaprobados resultaron similares. Del total de errores cometidos por los alumnos aprobados, un 35% son dificultades algebraicas, y considerando los desaprobados el porcentaje llega al 38%.

Sin embargo cuando estudiamos la caracterización epistemográfica de dichas dificultades observamos diferencias significativas entre las cometidas por los dos grupos.



Fig 4. Distribución porcentual de las dificultades encontradas en los alumnos aprobados



Fig 5. Distribución porcentual de las dificultades encontradas en los alumnos desaprobados

En primer lugar, notamos que tanto en alumnos aprobados como desaprobados las dificultades semiolinguísticas son las menos frecuentes.

Sin embargo, los alumnos aprobados muestran tener la mayor cantidad de sus dificultades localizadas en la dimensión nocional mientras que los alumnos desaprobados las tienen en la dimensión instrumental.

Parecería que, en éstos últimos las dificultades de carácter instrumental no les permiten avanzar con la correcta resolución del ejercicio. En cambio los alumnos aprobados, en general, pueden superar las cuestiones más mecánicas del ejercicio

mostrando errores algebraicos pero mayormente relacionados con las propiedades de los objetos matemáticos.

4.2. Comparación de los resultados de nuestro trabajo con la investigación anterior

	Total de alumnos		Alumnos Aprobados		Alumnos Desaprobados	
	1ª inv.	2ª inv.	1ª inv.	2ª inv.	1ª inv.	2ª inv.
% de dificultades algebraicas	37%	36%	41%	35%	36%	38%
% dificultades no algebraicas	63%	64%	59%	65%	64%	62%
Dimensión predominante	Semio	Instrumental	Nocional	Nocional	Semio	Instrumental

Fig 6. Comparación entre los resultados obtenidos en ambas investigaciones

Los porcentajes de errores algebraicos y no algebraicos son muy similares al considerar el total de alumnos de la muestra y los alumnos desaprobados. Varían levemente al considerar únicamente los alumnos aprobados: en la muestra anterior hubo un mayor porcentaje de dificultades algebraicas (41%) mientras que en la nueva muestra el 35% de las dificultades de los alumnos aprobados son de origen algebraico.

5. Conclusiones

Parecería que, el hecho de incluir los contenidos vinculados al trabajo algebraico en el programa de la materia no ha tenido un gran impacto en la disminución de las dificultades relacionadas con estas cuestiones.

Sin embargo, podría suceder que, al modificarse el programa de la materia, los alumnos que aprueban el examen tengan menos dificultades relacionadas con cuestiones algebraicas que los alumnos de la muestra anterior que no contaban con la instrucción previa de estos temas. Ponemos en duda si la forma en que los docentes transmiten estos conocimientos a sus alumnos al inicio de la materia es la más adecuada. Podría darse que a los alumnos aprobados les sirva el tratamiento de los temas y logren sortear algunas dificultades algebraicas que se veían en este grupo de alumnos en la muestra anterior. Por otra parte en los alumnos que desaprueban el examen parecería verse la persistencia de las dificultades asociadas al trabajo algebraico. En este sentido, pensamos continuar esta investigación analizando las dificultades algebraicas que cometieron los alumnos de esta muestra en la resolución de los ejercicios relacionados con funciones en el segundo parcial de la materia; creemos que este análisis nos permitirá verificar (o no) las hipótesis anteriormente planteadas.

Con respecto a las dimensiones, los resultados han variado respecto a la investigación anterior. Notamos que, en la primera investigación predominaban las dificultades ligadas a la dimensión semiolinguística mientras que en esta oportunidad prevalecen las correspondientes a la dimensión instrumental. Pensamos que esta diferencia se debe a que en la presente investigación hemos modificado la manera de

ubicar los errores según las dimensiones: anteriormente se localizaron algunos errores en más de una dimensión, con este criterio por ejemplo muchos errores se ubicaron tanto en la dimensión instrumental como en la semiolinguística. En esta oportunidad, como ya mencionamos, hemos decidido ubicar cada error en una única dimensión: aquella que, luego de un análisis y discusión, hemos considerado la dimensión predominante para el error en cuestión.

5.1 Aportes de nuestra investigación

Nuestro estudio permitió (a través de las discusiones generadas entre los integrantes del equipo al intentar localizar las dificultades de los estudiantes en las distintas categorías) obtener definiciones más refinadas de las dimensiones mencionadas en la Epistemografía.

Pusimos a prueba el modelo de las tablas de análisis usando la Epistemografía utilizado por primera vez para analizar errores en la tesis de Benítez (2014) obteniendo resultados satisfactorios. Comprobamos que el modelo de tablas para localizar los errores en las distintas dimensiones pudo ser utilizado en una nueva experiencia para analizar errores con una nueva muestra.

Creemos que a través de este estudio hicimos una contribución interesante a la Didáctica de la Matemática y por qué no a la de otras ciencias. El modelo utilizado de las tablas de análisis usando la Epistemografía podría usarse en otros estudios sobre análisis de errores así sea en Matemática como en otras disciplinas.

Es de nuestro interés seguir trabajando con el Análisis Epistemográfico en futuras investigaciones para continuar estudiando cuáles son sus potenciales y sus limitaciones.

6. Referencias Bibliográficas

- Abrate, R., Pochulu, M., Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajos*. Universidad Nacional de Villa María. Disponible en: <http://unvm.galeon.com/Libro1.pdf>
- Alvarez, F., Benítez, N., Bolívar, M., Hollisch, G., (2016) *Análisis Epistemográfico sobre el rol de las dificultades algebraicas ligadas al estudio de funciones en primer año de la universidad*. Disponible en http://www.edutecne.utn.edu.ar/cieciba_2016/Articulos_Eje01.pdf
- Benítez, N. (2014). *Una mirada epistemográfica sobre el rol de las dificultades algebraicas ligadas al estudio de funciones en el ingreso a la universidad*. Tesis de maestría. Neuquén UNComa.
- Benítez, N., Drouhard, J-Ph. (2015). *Una mirada epistemográfica sobre el rol de las dificultades algebraicas ligadas al estudio de funciones en el ingreso a la universidad*. En: *Actas de las IV Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el Campo de las Ciencias Exactas y Naturales*. Universidad Nacional de la Plata. ISSN 2250-8473. Disponible en: <http://jornadasceyn.fahce.unlp.edu.ar/convocatoria/actas-2015/trabajos-matematica/Benitez.pdf/view>
- Del Puerto, S., Minnaard, C., Seminara, S. (2004). *Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas*. Revista

Iberoamericana en Educación. (ISSN: 1681-5653). Disponible en:
<http://www.rieoei.org/deloslectores/1285Puerto.pdf>

Drouhard, J-Ph. (2011). *La Epistemografía: un útil al servicio de la didáctica de la matemática y de las ciencias*. Conferencia, Escuela de Invierno en Didáctica de la Matemática 2011. . DOI: 10.13140/2.1.1578.3201. El texto se encuentra en:
http://www.researchgate.net/publication/235677433_La_Epistemografa_un_til_al_servicio_de_la_didctica_de_la_matemtica_y_de_las_ciencias

Drouhard, J-Ph. (2013). *El análisis epistemográfico: un análisis multidimensional de los saberes para la didáctica de la matemática*. Comunicación en las XXIV Jornadas de Epistemología e Historia de la Ciencia, La Falda, Córdoba. Universidad Nacional de Córdoba. DOI: 10.13140/2.1.4417.6645. El texto completo se encuentra en:
http://www.researchgate.net/publication/266079746_El_analisis_epistemografico_un_analisis_multidimensional_de_los_saberes_para_la_didctica_de_la_matematica

Drouhard, J-Ph. (2014). *Breve presentación de la epistemografía, versión provisoria*. Artículo no publicado. Disponible en:
http://www.researchgate.net/publication/237020908_Breve_presentacin_de_la_Epistemografa_%28versin_provisoria%29

Kieran, C. (2004). The Core of Algebra: Reflexions on its Main Activities. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra; The 12th ICMI study*. (21-33). Norwood, MA: Kluwer.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra: orígenes y perspectivas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

7. Datos de los autores

Alvarez, Flavia Valeria: Es Profesora en Enseñanza Media y Superior de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la UBA (2006). Se desempeña como docente en diferentes universidades del ámbito privado y público.

Benítez, Natalia Soledad: Es Profesora en Enseñanza Media y Superior de Matemática egresada de la Facultad de Ciencias Exactas de la UBA (2007). Es Magíster en Educación de Ciencias con mención en Matemática, egresada de la Universidad Nacional del Comahue (2014). Se desempeña como docente en la Universidad de Buenos Aires (UBA) y en la Universidad Argentina de la Empresa (UADE). Realiza actividades de investigación desde el año 2012.

Bolívar, María Julia: Es Profesora en Enseñanza Media y Superior de Matemática egresada de la Facultad de Ciencias Exactas de la UBA (2006). Es Magíster en Educación en Ciencias egresada de la Universidad Nacional del Comahue (2016). Se desempeña como docente en distintas universidades tanto en el ámbito privado como público.

Hollisch, Gisele: Es Profesora en Enseñanza Media y Superior de Matemática egresada de la Facultad de Ciencias Exactas de la UBA (2006) y Licenciada en Matemática aplicada (2010) de la misma institución. Se desempeña como docente en distintas universidades tanto en el ámbito privado como público.