

Título Análisis Epistemográfico sobre las dificultades algebraicas ligadas al estudio de funciones

Tipo de Producto Ponencia completa

Autores Álvarez, Flavia; ; Benítez, Natalia; Bolivar, María Julia y Hollisch, Gisele

Publicado en: I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias Básicas. Concordia, Entre Ríos.

Código del Proyecto y Título del Proyecto

C17T01 - Análisis Epistemográfico sobre el rol de las dificultades algebraicas ligadas al estudio de funciones en primer año de la universidad

Responsable del Proyecto

Natalia Soledad Benítez

Línea

Didáctica en Matemática

Área Temática

TIC

Fecha

Agosto 2016

INTEC

Instituto de Tecnología

UADE



ANÁLISIS EPISTEMOGRÁFICO SOBRE LAS DIFICULTADES ALGEBRAICAS LIGADAS AL ESTUDIO DE FUNCIONES

**Benítez, Natalia
Soledad**
nabenitez@uade.edu.ar

**Bolívar, María
Julia**
mbolivar@uade.edu.ar

**Alvarez, Flavia
Valeria**
falvarez@uade.edu.ar

Hollisch, Gisele
ghollisch@uade.edu.ar

Universidad Argentina de la Empresa
C1073AAO Lima 775 Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina

Resumen

En este trabajo presentaremos brevemente el Análisis Epistemográfico (Drouhard, 2013) y explicaremos cómo fue utilizado para analizar los errores que cometen los estudiantes de primer año de la universidad al intentar resolver ejercicios sobre funciones.

El objetivo es analizar si las dificultades algebraicas de los alumnos de la materia Matemática Empresarial I de la UADE tienen influencia en el aprendizaje del tema función.

Este trabajo forma parte del proyecto de investigación: “Análisis Epistemográfico sobre el rol de las dificultades algebraicas ligadas al estudio de funciones en primer año de la Universidad” y es una continuación del trabajo de tesis de la Mg. Natalia Benítez. En ese momento no formaban parte de los contenidos de la materia cuestiones relativas al trabajo algebraico, mientras que actualmente estos contenidos constituyen la primera unidad del programa. La segunda unidad trata sobre el tema función. Con estos cambios, el desafío del presente trabajo es realizar un análisis similar al efectuado en su momento considerando la organización actual de la materia. Presentaremos aquí los primeros resultados.

El *Análisis Epistemográfico* nos permitió observar que las dificultades algebraicas de los estudiantes continúan siendo un punto clave que debe ser considerado por los docentes al momento de pensar la enseñanza del tema función.

Palabras clave: Análisis Epistemográfico, dificultades algebraicas, funciones.

1. Introducción

Una preocupación compartida por alumnos, docentes e investigadores es poder lograr que los estudiantes que ingresan a la universidad comprendan los conceptos y las actividades que se desarrollan en la clase de matemática. En este sentido, resulta interesante estudiar las dificultades en relación al trabajo algebraico que presentan los alumnos de primer año del nivel universitario en el aprendizaje del concepto de función.

Elegimos el tema función para observar dichas dificultades dado que se trata, por un lado, del primer tema de Análisis Matemático que deben abordar los estudiantes en Matemática de primer año. Por otro lado, pensamos que, tener conocimiento acerca de la relación existente entre los errores de naturaleza algebraica de los

alumnos y la comprensión de los temas referidos al concepto de función puede aportar elementos para re-organizar una enseñanza que ayude a sortear estas dificultades.

En un primer trabajo de investigación realizado en la Tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales llevada a cabo por la Mg. Natalia Benítez con la dirección del Dr. Jean- Philippe Drouhard y la co-dirección de la Mg. Patricia Detzel se utilizó el Análisis Epistemográfico (Drouhard, 2013) para analizar los errores que cometen los estudiantes de primer año de la universidad al intentar resolver ejercicios sobre funciones. El objetivo de la investigación desarrollada fue analizar si las dificultades algebraicas con las que los alumnos ingresaban a la universidad tenían influencia en sus desempeños.

Los resultados de ese estudio indicaron que este tipo de dificultades representan un punto clave tanto para los estudiantes como para el trabajo docente; en este sentido, tienen una fuerte repercusión en la enseñanza y en el aprendizaje del tema función.

La investigación se realizó analizando parciales de la materia Matemática I de la Universidad Argentina de la Empresa tal como se organizaba en el año 2011. En ese momento, no formaba parte de los contenidos de la materia las cuestiones relativas al trabajo algebraico como ser operaciones con expresiones algebraicas, ecuaciones e inecuaciones, entre otras. Los alumnos se enfrentaban al estudio de funciones como primer tema del programa.

En el año 2012 se modificó el programa de la materia y en el año 2015 cambió también su nombre, pasándose a llamar Matemática Empresarial I. En el nuevo programa, los contenidos algebraicos constituyen la primera unidad mientras que la segunda trata sobre el tema función. A partir de estos cambios, buscamos realizar un análisis similar al efectuado en su momento con los parciales de los alumnos tomando en cuenta la organización actual de la materia. Nuestro objetivo es indagar si los cambios propuestos desde el currículo han influido, y de qué manera, en el aprendizaje de los alumnos analizando si estas dificultades algebraicas continúan siendo un obstáculo para realizar las actividades correspondientes al tema de funciones.

En esta primera etapa del trabajo de investigación hemos categorizado los errores de 83 estudiantes al resolver un ejercicio del primer parcial referido al tema de función, utilizando como marco teórico el Análisis Epistemográfico propuesto por Drouhard (2013) descrito en la próxima sección. Asimismo, hemos distinguido entre errores que son de naturaleza algebraica y aquellos que no lo son.

2. Marco Teórico

Nos interesa el estudio de errores porque como mencionan Abrate et al. (2006):

“El análisis de los errores sirve para ayudar al docente a organizar estrategias para un mejor aprendizaje insistiendo en aquellos aspectos que

generan más dificultades y contribuye a una mejor preparación de instancias de corrección”.

Creemos que, como señalan en su trabajo Del Puerto et al. (2004), el análisis de los errores cometidos por los alumnos en su proceso de aprendizaje provee una rica información acerca de cómo se construye el conocimiento matemático y, al mismo tiempo, constituye una excelente herramienta para realimentar el proceso de enseñanza-aprendizaje con el fin de mejorar los resultados.

Haciendo foco en el aprendizaje y el manejo de las técnicas que menciona Sessa (2005) y en las ideas de Kieran (2004) para nuestra investigación definimos la actividad algebraica como el uso de instrumentos algebraicos para operar sobre objetos considerados desde el punto de vista algebraico o reducidos a su dimensión algebraica. La “actividad algebraica ligada al estudio de funciones” sería en este sentido una actividad basada en el uso de instrumentos algebraicos para operar sobre funciones. Es decir, una actividad matemática que se caracteriza por el empleo de herramientas algebraicas para la resolución de problemas analíticos. La misma incluye acciones como: saber factorizar, desarrollar, simplificar, operar y trabajar con expresiones equivalentes.

Para realizar un trabajo adecuado sobre funciones los alumnos deben dominar todas estas acciones de lo contrario podrían convertirse en un obstáculo.

2.1 El Análisis Epistemográfico

Como señalamos anteriormente, para realizar este estudio elegimos analizar el trabajo de los alumnos utilizando la división en capas de análisis del trabajo matemático y la categorización utilizada en el Análisis Epistemográfico (Drouhard, 2013), la cual fue desarrollada para la organización de los conocimientos científicos. Esta elección surge a partir de la necesidad de categorías de análisis más finas que “dificultades ligadas al trabajo algebraico” o “dificultades no ligadas al trabajo algebraico”.

2.1.1. Capas de análisis de la actividad matemática

Según Drouhard (2014) la actividad matemática de los alumnos puede ser analizada desde cinco “capas”. Estas son: la capa del Contrato Pedagógico (capa CP), la capa del Contrato Didáctico (capa CD), la capa de Matematización y Modelización (capa MyM), la capa de los Discursos y del Razonamiento (capa DyR) y la capa de los Objetos de Saber y las Operaciones (capa OSO).

La capa CP abarca los saberes que los estudiantes y docentes deben tener para cumplir su rol respectivo de alumno y de profesor. No tiene ninguna relación con los saberes matemáticos y puede ligarse a la noción de “oficio de alumno” desarrollada por Philippe Perrenoud (1994).

En la capa CD se analiza lo que los alumnos deben conocer del *contrato didáctico* (qué es lo que ellos y el profesor deben hacer respecto a las tareas matemáticas, etc.).

En la capa MyM se estudia cómo se pasa del problema (matemático o extra matemático) tal como está formulado a otro problema matemático del cual el alumno tiene los instrumentos para resolverlo y cuya solución contribuye a hallar la solución del problema inicial.

En la capa DyR el análisis se centra tanto en los razonamientos (espontáneos o no, válidos o no) de los alumnos como en las formas discursivas usadas para expresar esos razonamientos.

La capa OSO es el lugar del análisis en términos de objetos matemáticos y de las operaciones sobre los mismos. Ejemplos de objetos pueden ser los números, las funciones de tipo $y = ax+b$, las ecuaciones e inecuaciones y su resolución tanto gráfica como numérica.

2.1.2 Categorías definidas por la Epistemografía: Dimensiones y Reglas del juego

Drouhard distingue dos tipos de saberes: los relativos a *objetos* (función lineal, gráfico de una función, ecuación, etc.), y los relativos a las “*reglas del juego matemático*” (las soluciones obtenidas por cálculo deben ser exactas, las sacadas de una resolución gráfica tienen un cierto grado de aproximación, etc.).

El Análisis Epistemográfico considera que los saberes relativos a los “objetos matemáticos” se sitúan en un espacio de tres dimensiones

principales: Nocional, Semio-lingüística e Instrumental.

Conocer un objeto matemático equivale a conocerlo en cada dimensión.

En la *dimensión Nocional* de los objetos se encuentran los saberes relativos a las definiciones y propiedades de los objetos matemáticos y, más generalmente, a cómo los objetos matemáticos están relacionados entre sí.

En la *dimensión Semio-lingüística* se hallan, por un lado, los saberes relacionados con el funcionamiento de todo el sistema de representación semiótico, en particular, su semántica, es decir, la relación entre las representaciones y los objetos matemáticos. También encontramos en esta dimensión los saberes relativos a la representación de los objetos matemáticos particulares del dominio. Necesitamos aprender los saberes de esta dimensión para leer, interpretar, escribir, dibujar, entender, procesar representaciones (escrituras, esquemas, gráficos, etc.) de los objetos de saber.

La *dimensión Instrumental* incluye saberes relativos a cómo se usan los instrumentos, en qué medida vale la pena o no usarlos, o cuáles son los costos y beneficios de hacerlo. Es decir que esta dimensión trata sobre el “cómo hacer”, sobre las diferentes formas de hacer algo, las ventajas y los inconvenientes de usar tal o cual manera para hacer.

Los saberes relativos a las “Reglas del juego Matemático” tienen que ver con conocer las “reglas del juego”. Éstas son las que rigen la validez lógica de los razonamientos, la aceptabilidad de las representaciones semióticas, el uso legítimo de los instrumentos, etc. Los saberes relativos a las reglas del juego matemático tratan sobre lo permitido y lo prohibido, a diferencia de los saberes instrumentales que tratan sobre lo posible y lo imposible (o lo fácil y difícil).

Además, es preciso saber nombrar, e identificar, las cosas (objetos, operaciones, reglas del juego), como por ejemplo fracción, numerador, denominador, etc.

3. Descripción de la experiencia y resultados

En esta primera etapa de nuestra investigación analizamos los errores que

cometieron los estudiantes al intentar resolver un ejercicio del primer parcial vinculado con el tema función. Consideramos una muestra integrada por 83 alumnos, provenientes de tres cursos diferentes, de la misma materia. En estos tres cursos se consideró la resolución del mismo ejercicio sobre el tema mencionado.

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x) = \frac{\sqrt{-\frac{2}{3}(x+1)+2}}{x+2}$$

a. Determinar el conjunto A, dominio de la función.

b. Hallar analíticamente el conjunto de ceros de la función f.

c. Hallar el conjunto solución de la ecuación $f(x) = 1$.

Figura 1. Ejercicio considerado para este trabajo

Para analizar en detalle los errores de los estudiantes realizamos, en primer lugar, un “Análisis Epistemográfico” del ejercicio con el objeto de estudiar la relación entre el álgebra y el análisis matemático ligado al tema funciones. Este análisis consistió en identificar en cada ítem del ejercicio qué saberes los alumnos deberían poner en juego al resolverlos, para luego distinguir en qué capa de análisis (CP, CD, MyM, DyR, OSO) se sitúan esos saberes. Para aquellos saberes localizados en la Capa OSO identificamos qué dimensiones (Nocional, Semio-lingüística e Instrumental) de dichos conocimientos deben poner en juego los estudiantes y si hay alguna regla del juego que éstos deban saber.

Este análisis nos permitió obtener algún indicio sobre dónde podrían situarse las dificultades de los estudiantes (en qué capas y dimensiones) al resolver el ejercicio mencionado en la figura 1.

Luego de desarrollar el Análisis Epistemográfico analizamos los errores que cometieron los alumnos al intentar resolver cada ítem del ejercicio considerado, distinguiendo a su vez entre errores algebraicos y no algebraicos. A

fin de realizar este análisis, construimos una tabla por cada apartado del ejercicio.

Nº de parcial	Presenta errores en este ítem					No presenta errores en este ítem	No resuelve
	Capa CP	Capa CD	Capa MyM	Capa DyR	Capa OSO		
1							
2							
3							
...							
83							

Figura 2. Tabla construida para analizar los errores sobre cada apartado del ejercicio

En esta tabla marcamos, considerando cada examen por separado, si el alumno cometió o no errores en ese ítem y, en caso de haber cometido alguno, lo localizamos en la capa de análisis correspondiente, realizando una breve descripción del mismo.

Nº	Presenta errores en este ítem					No presenta errores en este ítem	No resuelve
	Capa CP	Capa CD	Capa MyM	Capa DyR	Capa OSO		
1				X (no plantea la restricción de la raíz)			

Figura 3. Ejemplo de clasificación de error a través de la tabla referido al ítem a.

Luego de localizar los errores en las distintas capas de análisis obtuvimos que la mayor parte de ellos se localizaron en la capa OSO y en la capa DyR.

Por ejemplo en lo que se refiere al ítem a, un 31% de los errores se sitúan en la capa OSO y un 62% en DyR, el resto se localizan entre las capas CD y MyM. En el ítem b, un 51% corresponde a la capa OSO y un 29% a la capa DyR, y, por último, en el ítem c, encontramos un 55% en la capa OSO y un 43 % a la capa DyR.

A continuación analizamos los resultados de esta primera etapa y obtuvimos algunas conclusiones sobre el impacto de las dificultades algebraicas en el desempeño de los alumnos.

Para el análisis de los resultados realizamos un estudio estadístico elemental. Con respecto a los porcentajes de errores de naturaleza algebraica y no algebraica obtuvimos los valores que se detallan en la Tabla 1.

Tabla 1: Resumen de resultados de la primera etapa de la investigación

ítem	Porcentaje de alumnos que tuvieron errores en su resolución	Porcentaje de alumnos que tuvieron errores relacionados con nociones algebraicas (sobre el total de alumnos de la muestra)	Porcentaje de alumnos que tuvieron errores relacionados con nociones algebraicas (sobre el total de alumnos que presentaron errores)
A	73%	28%	38%
B	49%	17%	34%
C	82%	57%	69%

4. Discusión y acciones futuras

A partir de nuestro estudio, concluimos que las dificultades asociadas al trabajo algebraico continúan siendo un punto clave para los alumnos de Matemática Empresarial 1, a pesar de que éstos vuelven a trabajar y reforzar dichas cuestiones al inicio de la materia. En esta primera etapa obtuvimos resultados similares a los de la investigación anterior desarrollada en la tesis de Benítez (2014).

Como podemos observar en la Tabla 1, en los tres ítems del ejercicio considerado existe un alto porcentaje de alumnos que presentan errores en su resolución. En el ítem c es notorio el alto porcentaje de alumnos que presentan dificultades relacionadas con nociones algebraicas (ya sea si lo calculamos sobre el total de estudiantes de la muestra o sobre la total de alumnos que presentaron errores en la actividad). Si bien, en los ítems a y b este porcentaje es bastante menor no deja, de todas formas, de ser significativo.

Consideramos que en el ítem c pueden observarse mayores dificultades por parte de los estudiantes relacionadas con el trabajo algebraico debido a que es el ítem que involucra en su resolución mayor cantidad de nociones ligadas al álgebra (ver Figura 1).

Pudimos observar que, en todos los ítems estudiados las mayores dificultades de los

alumnos se localizan en las capas de análisis OSO y DyR. Cabe destacar que no hemos hecho aquí la distinción entre errores de naturaleza algebraica y no algebraica. Es decir, que las dificultades consideradas pueden estar relacionadas con el trabajo algebraico o simplemente con cuestiones ligadas específicamente al análisis matemático.

A través del análisis detallado de los errores pudimos notar que las dificultades de carácter algebraico encontradas en los estudiantes de la muestra considerada se localizaron únicamente en la capa de análisis OSO. Creemos que, no hemos encontrado dificultades ligadas al trabajo algebraico en la capa de análisis DyR debido a que los alumnos, al realizar la actividad propuesta, están resolviendo ejercicios de análisis matemático relacionados con el tema “funciones”. En este sentido, si bien al resolver los ejercicios deben poner en juego conocimientos algebraicos, pensamos que, la parte del razonamiento como así también la de las formas discursivas usadas para expresar esos razonamientos están relacionadas con conocimientos que pertenecen al análisis matemático y no al álgebra.

En una segunda etapa de la investigación (no contemplada en este artículo) pretendemos hacer un análisis por examen (es decir por alumno). Realizaremos una descripción detallada de cada error de índole algebraico cometido por el estudiante e identificaremos en cuál o cuáles de las dimensiones del conocimiento que menciona la Epistemografía tuvo dificultades el alumno al cometer dicho error. Volcaremos esta información en una nueva tabla (una para cada alumno).

Luego de terminar el análisis para la totalidad de los estudiantes y ejercicios de la muestra (consideraremos también ejercicios del segundo parcial) estudiaremos los resultados y sacaremos conclusiones para el grupo de alumnos, continuando con el estudio del impacto de los errores algebraicos en el desempeño de los estudiantes y analizando si existe alguna “región” donde estos presenten mayores dificultades.

Compararemos resultados con la investigación anterior y realizaremos una propuesta didáctica para atender a las dificultades.

5. Conclusiones

Nuestro estudio permitió (a través de las discusiones generadas entre las integrantes del

equipo al intentar localizar las dificultades de los estudiantes en las distintas categorías) obtener definiciones más refinadas de las capas de análisis mencionadas en la Epistemografía.

Pusimos a prueba el modelo de las tablas de análisis (Figuras 2 y 3) usando la Epistemografía, el cual fue utilizado por primera vez para analizar errores en la tesis de Benítez (2014) obteniendo resultados satisfactorios. Comprobamos que este modelo de tablas para clasificar los errores en algebraicos o no algebraicos y para localizar éstos en las distintas capas de análisis pudo ser utilizado en una nueva experiencia para analizar errores en una nueva muestra.

Tenemos por delante (en la segunda etapa de la investigación) el desafío de ver si las tablas para localizar los errores en las dimensiones del conocimiento (Nocional, Semio-lingüística e Instrumental) que describe la Epistemografía también son útiles en esta nueva experiencia.

Creemos que, a través de este estudio realizamos una contribución interesante a la Didáctica de la Matemática y por qué no a la de otras ciencias. El modelo utilizado de las tablas de análisis usando la Epistemografía podría usarse en otros estudios sobre análisis de errores así sea en Matemática como en otras disciplinas.

Es de nuestro interés continuar trabajando con el Análisis Epistemográfico en futuras investigaciones con el objetivo de identificar cuáles son sus potenciales y sus limitaciones.

6. Referencias

1. C. Kieran. "The Core of Algebra: Reflexions on its Main Activities". In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra; The 12th ICMI study*. pp.21-33. Norwood, MA: Kluwer. 2004.
2. C. Sessa. "Iniciación al estudio didáctico del álgebra: orígenes y perspectivas". Libros del Zorzal. Buenos Aires. Argentina. 126 páginas. 2005
3. J-Ph. Drouhard. "La Epistemografía: un útil al servicio de la didáctica de la matemática y de las ciencias". Conferencia, Escuela de Invierno en Didáctica de la Matemática. 2011. DOI: 10.13140/2.1.1578.3201. 2011. El texto se encuentra en: http://www.researchgate.net/publication/235677433_La_Epistemografia_un_til_al_servicio_de_la_didctica_de_la_matemtica_y_de_las_ciencias
4. J-Ph. Drouhard. "El análisis epistemográfico: un análisis multidimensional de los saberes para la didáctica de la matemática". Comunicación en las XXIV Jornadas de Epistemología e Historia de la Ciencia, La Falda, Córdoba. Universidad Nacional de Córdoba. 2013. DOI: 10.13140/2.1.4417.6645. 2013. El texto completo se encuentra en: http://www.researchgate.net/publication/266079746_El_analisis_epistemografico_un_analisis_multidimensional_de_los_saberes_para_la_didctica_de_la_matemtica
5. J-Ph. Drouhard. "Breve presentación de la epistemografía", versión provisoria. 2014. Artículo no publicado. Disponible en: http://www.researchgate.net/publication/237020908_Breve_presentacin_de_la_Epistemografia_%28versin_provisoria%29
6. N. Benítez. "Una mirada epistemográfica sobre el rol de las dificultades algebraicas ligadas al estudio de funciones en el ingreso a la universidad". Tesis de maestría. UNComa. Neuquén. Argentina. 2014
7. R. Abrate, M. Pochulu, J. Vargas. "Errores y dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajos". Universidad Nacional de Villa María. Córdoba. Argentina. 2006. Disponible en: <http://unvm.galeon.com/Libro1.pdf>
8. S. Del Puerto, C. Minnaard, S. Seminara. "Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas". Revista Iberoamericana en Educación. (ISSN: 1681-5653). Vol. 38 N° 4, pp.1-13. 2006. Disponible en: <http://www.rieoei.org/deloslectores/1285Puerto.pdf>