

# **PROYECTO FINAL DE INGENIERÍA**

## **SIMULACIÓN DE TURBOMÁQUINAS UTILIZANDO OpenFOAM**

**Allemanni, Bruno – LU 1013186**

Ingeniería Electromecánica

Tutor:

**Caron, Pablo Alfredo, UADE**

Co-Tutor:

**Larreteguy, Axel Eduardo, UADE**

**Julio 10, 2017**



**UNIVERSIDAD ARGENTINA DE LA EMPRESA  
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS EXACTAS**

## 1. Resumen

Se realizó la simulación de una bomba centrífuga mediante el método de volúmenes finitos. Se estudiaron los modelos matemáticos y computacionales existentes para este tipo de dispositivos, con partes fijas y rotantes. Se seleccionó el solver `pimpleDyMFoam` del paquete de código abierto OpenFOAM, para resolver el modelo de forma transitoria. Se realizaron varias simulaciones hasta encontrar las condiciones de borde que hacen operar a la bomba de forma óptima.

Las simulaciones bidimensionales realizadas devolvieron resultados cualitativamente correctos en comparación con resultados experimentales encontrados en la literatura.

## 2. Abstract

The simulation of a centrifugal pump was performed using the finite volume method. Mathematical and computational models for these devices, with fixed and rotating parts were studied. PimpleDyMFoam solver was selected, from the opensource package OpenFOAM, to solve the transient model. Several simulations were performed to find the boundary conditions that make the pump operate optimally. Two-dimensional simulations returned qualitatively correct results compared with experimental results found in the literature.

### 3. Contenido

1. Resumen.....	2
2. Abstract .....	3
3. Contenido .....	4
4. Estado del arte .....	7
4.1. Flujo potencial y Quasi-3D (1978-1985) .....	7
4.2. Euler 3D (1985-1995) .....	7
4.3. Códigos RANS y escalas integrales del flujo (1995-2005) .....	8
4.4. Técnicas DES/LES y la cascada de energía (2000/2005-actualidad) ...	8
4.5. Modelizaciones multifase y multifísica (2005-actualidad).....	8
4.6. Resumen de la evolución histórica de los métodos numéricos .....	9
5. Teoría .....	10
5.1. Teoría matemática.....	10
5.1.1. Enfoque integral .....	10
5.1.1.1. Teorema del transporte de Reynolds.....	12
5.1.1.2. Conservación de la masa.....	14
5.1.1.3. Conservación de la cantidad de movimiento. ....	15
5.1.2. Enfoque diferencial .....	15
5.1.2.1. Campo de aceleraciones de un fluido.....	15
5.1.2.2. Ecuación diferencial de conservación de masa. ....	16
5.1.2.3. Ecuación diferencial de conservación de cantidad de movimiento. ...	17
5.1.3. Ecuaciones de Navier – Stokes en sistema de referencia rotante.....	21
5.1.3.1. Relación entre sistema de referencia rotante y estacionario .....	21
5.2. Teoría numérica. ....	24
5.2.1. Volúmenes finitos para flujo difusivo.....	25

---

5.2.2.	Volúmenes finitos para flujo difusivo convectivo estacionario.....	28
5.2.2.1.	Esquema de diferencias centrales.....	29
5.2.2.2.	Esquema “upwind”.....	29
5.2.2.3.	Esquema mixto.....	31
5.2.3.	Algoritmos de acoplamiento presión – velocidades.....	31
5.2.3.1.	Malla escalonada.....	32
5.2.3.2.	Algoritmo SIMPLE.....	35
5.2.4.	Volúmenes finitos para flujo difusivo convectivo transitorio.....	38
5.2.4.1.	Algoritmo PIMPLE.....	39
6.	Descripción de casos simplificados .....	40
6.1.	SRFSimpleFoam .....	41
6.1.1.	Descripción geométrica.....	41
6.1.2.	Parámetros numéricos .....	41
6.1.3.	Parámetros físicos y condiciones de borde .....	42
6.1.4.	Resultados .....	42
6.2.	SRFPimpleFoam .....	46
6.2.1.	Descripción geométrica.....	46
6.2.2.	Parámetros numéricos .....	46
6.2.3.	Parámetros físicos y condiciones de borde .....	47
6.2.4.	Resultados .....	47
6.3.	SimpleFoam + fvOptions (MRFSimpleFoam) .....	49
6.3.1.	Descripción geométrica.....	49
6.3.2.	Parámetros numéricos .....	49
6.3.3.	Parámetros físicos y condiciones de borde .....	50
6.3.4.	Resultados .....	50

6.4.	PimpleDyMFoam .....	52
6.4.1.	Parámetros numéricos .....	52
6.4.2.	Parámetros físicos y condiciones de borde .....	52
6.4.3.	Resultados .....	53
7.	Descripción del caso de validación para simulación de turbomáquinas ....	55
8.	Descripción de la simulación .....	59
8.1.	Malla .....	59
8.2.	Condiciones de borde e iniciales.....	62
8.3.	Resultados .....	66
8.4.	Comparación de resultados .....	70
9.	Conclusiones .....	71
10.	Bibliografía .....	74

## 4. Estado del arte

A continuación, se desarrolla un repaso histórico de los distintos métodos numéricos utilizados para estudiar el flujo en el interior de las turbomáquinas (FERNÁNDEZ ORO, J.M. Numerical modeling of hydraulic turbomachines: a historical review.). La industria aeroespacial fue la que marcó la tendencia, tanto a nivel de algoritmos como de modelos de turbulencia, para el estudio de turbinas y compresores de gas. Las máquinas hidráulicas, por compartir los mismos principios básicos de funcionamiento, aprovecharon los mismos avances, pero con la simplificación de trabajar con flujo incompresible.

### 4.1. Flujo potencial y Quasi-3D (1978)

A partir del año 1978, se realizan las primeras simulaciones de bombas y turbinas simplificadas en geometrías bidimensionales. Para ello se implementan, en primer lugar, las ecuaciones de Euler, que consideran flujo incompresible y estacionario, sin tener en cuenta los efectos viscosos. Además, incorporando la condición de flujo irrotacional, se obtienen las características de flujo potencial, de forma que las ecuaciones de Navier Stokes se reducen a ecuaciones de Laplace.

Se simulan, de forma desacoplada, el rotor y la salida de la caja espiral, para el caso de las bombas. El objetivo consiste en visualizar líneas de corriente y detectar puntos de estancamiento para comprobar los diseños básicos de las geometrías.

En el caso de turbinas hidráulicas, los primeros casos resuelven las zonas de aspiración de las máquinas y modelos simplificados de los canales entre rodets. Las geometrías Francis de mayor complejidad, no se estudian con suficiente éxito hasta la siguiente etapa (Euler 3D). Sólo se resolvían en esta etapa, flujos principales, de forma estacionaria.

### 4.2. Euler 3D (1985)

Mediante el uso de Euler se logra avanzar en una mejor definición de las geometrías de cálculo y en los métodos de generación de mallas. Además, se resuelven flujos rotacionales. La bibliografía de la época (GUNZBURGER, M., NICOLAIDES, R. Incompressible Computational Fluid Dynamics: Trends and Advances. 1993) muestra avances en la predicción de flujos secundarios, provocados por fenómenos de vórtice.

En este punto, las herramientas CFD comienzan a dejar de ser complementarias y sólo para visualización e ilustración del flujo para empezar a ser una herramienta de análisis.

Se comienzan a realizar procesos de validación de métodos numéricos contrastados con resultados experimentales.

#### **4.3. Códigos RANS y escalas integrales del flujo (1995)**

Se comienzan a utilizar los métodos por volúmenes finitos, que permiten resolver de forma conservativa todos los términos de transporte (convectivos y difusivos), resolviendo las ecuaciones de Navier Stokes promediadas por Reynolds (Gourdain, 2009)

Además, la introducción de modelos de turbulencia revoluciona el campo de las simulaciones numéricas. Aparecen un gran número de modelos de turbulencia: k-epsilon y todas sus variantes, k-omega, Spalart-Allmaras, Reynolds Stress Model, etc.

En lo que se refiere a turbomáquinas hidráulicas, se avanza especialmente en aquellas geometrías que sufren desaceleración del flujo y por tanto son muy susceptibles a sufrir separación de capa límite (efecto puramente disipativo y viscoso), como es el caso de flujo en bombas, tanto en el propio rodete como en la caja espiral o difusores posteriores, y del tubo de descarga en el caso de turbinas (la energía cinética de salida se recupera en presión).

#### **4.4. Técnicas DES/LES y la cascada de energía (2000/2005)**

Con las simulaciones URANS (Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes) utilizadas en casi todas las investigaciones, se vuelve a redefinir el alcance de las técnicas numéricas, incorporando las técnicas DES/LES (Detached eddy simulation/Large Eddy Simulation). El objetivo es resolver (y no modelizar) cada vez más contenido energético presente en las fluctuaciones turbulentas de los flujos. Esto requiere de mallas cada vez más finas y de pasos temporales cada vez más bajos, llevando al límite las capacidades de computación disponibles.

#### **4.5. Modelizaciones multifase y multifísica (2005)**

Con el aumento de las capacidades computacionales también se ha desarrollado la posibilidad de incluir otros fenómenos más complejos del flujo. En el caso de las turbomáquinas hidráulicas, uno de los más importantes es el de la cavitación, fenómeno extremadamente limitador del funcionamiento tanto para bombas como para turbinas. En principio, es imprescindible identificar aquellas zonas de baja presión, susceptibles de sufrir cavitación. Para esto basta con emplear modelizaciones monofásicas y comprobar que todas las zonas tienen una presión superior a la de vapor del fluido de trabajo. Sin embargo, si se requiere



mayor información, como por ejemplo estudiar cuál es el efecto de la cavitación sobre la eficiencia de la máquina, o también tener una mejor predicción del tamaño de las zonas de cavitación, es necesario abordar una simulación bifásica. Esto permite resolver la formación y colapso de las burbujas de gas, las cuales, al interactuar con el flujo principal, introducen efectos de bloqueo y pérdida de prestaciones en la máquina.

Por último, y cada vez con mayor relevancia, se están imponiendo cálculos integrados de interacción fluido-estructura. Especialmente de interés en el caso de grandes turbinas, sometidas a grandes esfuerzos torsores e importantes fluctuaciones de presión, se han desarrollado algoritmos de acoplamiento entre las cargas fluido dinámicas y su implicación en el estado tensional de los elementos mecánicos: rodetes, directrices, álabes guadores, apoyos, cojinetes, etc.

#### 4.6. Resumen de la evolución histórica de los métodos numéricos

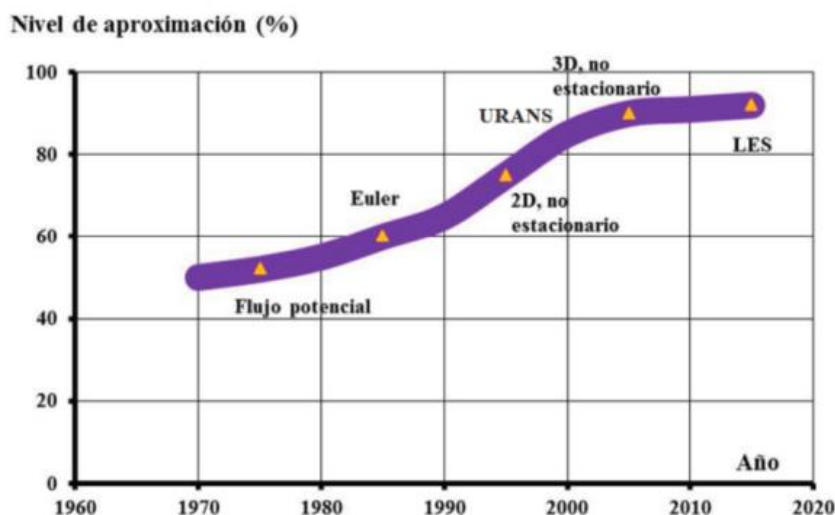


Figura 1: Evolución histórica de métodos numéricos. (*Numerical modelling of hydraulic turbomachines: a historical review. Fernandez Oro, J.M.*)

## 5. Teoría

### 5.1. Teoría matemática

En esta sección se desarrolla la teoría matemática que sirve como base para las simulaciones realizadas en este trabajo.

Se comienza con la exposición de las ecuaciones integrales de un fluido, para luego pasar al enfoque diferencial de las mismas ecuaciones. Por último, se muestran estas mismas ecuaciones, pero en un sistema de referencia rotante.

#### 5.1.1. Enfoque integral

**Volumen de control.** Todas las leyes de la mecánica están escritas para un sistema, el cual está definido como una cantidad arbitraria de masa de identidad definida. Cualquier partícula externa al sistema se define como entorno. Entonces, las leyes de la mecánica describen la interacción entre el *entorno* y el sistema.

En primer lugar, el sistema es una cantidad fija de masa, identificada por  $m$ . Por este motivo, la masa del sistema se conserva y no cambia en el tiempo. Esta ley básica de la mecánica tiene una representación matemática, llamada conservación de la masa:

$$m_{syst} = const \quad (1)$$

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (2)$$

En segundo lugar, si el ambiente ejerce una fuerza sobre el sistema, por la segunda ley de Newton se sabe que la masa comenzará a acelerarse:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \quad (3)$$

En tercer lugar, si el ambiente ejerce un momento neto  $\mathbf{M}$  con respecto al centro de masa del sistema, entonces existirá un efecto de rotación que se puede expresar como sigue:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{H}}{dt} \quad (4)$$

donde  $H = \sum(\vec{r} \times m\vec{v})$  es el momento angular del sistema con respecto a su centro de masa.

Todas las ecuaciones anteriores aplican tanto para fluidos como para sólidos. Sin embargo, son ideales para la mecánica del sólido, donde se sigue siempre al mismo sistema porque representa al objeto que se está estudiando. En fluidos, en cambio, es más común que lo que se desea estudiar sea una región por donde pasan distintas partículas o sistemas. Esto implica que se deban reformular las leyes básicas de la mecánica.

Al trabajar con un volumen de control, se reformulan las leyes básicas para que apliquen a una determinada región que se será ocupada por un sistema determinado sólo un instante. El sistema pasará por esta región, y otro sistema distinto ocupará el mismo lugar. En fluidos, sólo interesa estudiar el campo del fluido en esa región, y no es de relevancia las condiciones del flujo fuera del volumen de control.

**Caudal.** Todas las ecuaciones a desarrollar involucran el caudal de volumen  $Q$  o el caudal másico  $\dot{m}$  pasando por una superficie (imaginaria) definida en el flujo.

A continuación, se muestra una superficie imaginaria por la que pasa un fluido y se quiere conocer qué pasa por unidad de tiempo.

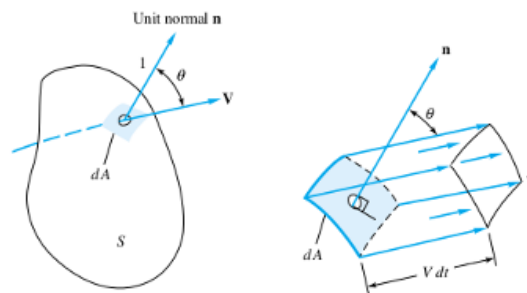


Figura 2: Caudal de volumen atravesando una superficie imaginaria (*Fluid Mechanics – Frank M. White*)

Si se define  $\mathbf{v}$  como la velocidad del fluido,  $dA$  elemento diferencial de la superficie,  $\mathbf{n}$  el versor normal a  $dA$ , y  $\theta$  el ángulo entre  $\vec{\mathbf{n}}$  y  $\vec{\mathbf{v}}$ , entonces la cantidad de fluido que pasa por  $dA$  en un tiempo  $dt$  es:

$$dV = \vec{\mathbf{v}} dt dA \cos(\theta) = (\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{n}}) dA dt \quad (5)$$

$$Q = \int_S (\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{n}}) dA = \int_S v_n dA \quad (6)$$

Se considera al vector unitario  $\mathbf{n}$ , saliente de la superficie. Por este motivo,  $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{n}}$  positivo implica un flujo saliente y, por consiguiente,  $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{n}}$  negativo un flujo entrante.

Si se multiplica al caudal por la densidad del fluido se obtiene el caudal másico  $\dot{m}$ . Si la densidad varía sobre la superficie, entonces en la ecuación debe ser parte de la integral:

$$\dot{m} = \int_S \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \int_S \rho v_n dA \quad (7)$$

En cambio, si la densidad es constante, sale fuera de la integral y resulta una proporción directa entre el caudal másico y el caudal de volumen.

$$\dot{m} = \rho Q \quad (8)$$

### 5.1.1.1. Teorema del transporte de Reynolds

La conversión de sistema a volumen de control se denomina teorema del transporte de Reynolds, el cual puede ser aplicado a todas las leyes básicas. Observando las leyes básicas descriptas anteriormente, se puede ver que todas involucran la derivada temporal de una propiedad del fluido, ya sea  $m$ ,  $\vec{v}$  o  $\vec{H}$ . Por este motivo, es necesario relacionar la derivada temporal de una propiedad del fluido con la tasa de cambio de esa propiedad en una cierta región. La fórmula de conversión difiere si el volumen de control es fijo, móvil o deformable.

**Volumen de control fijo unidimensional.** Se considera un ducto con flujo unidimensional  $\vec{v} = \vec{v}(x)$ . En un instante determinado  $t$ , el volumen de control seleccionado coincide exactamente con el sistema 2, como se puede observar en la siguiente figura.

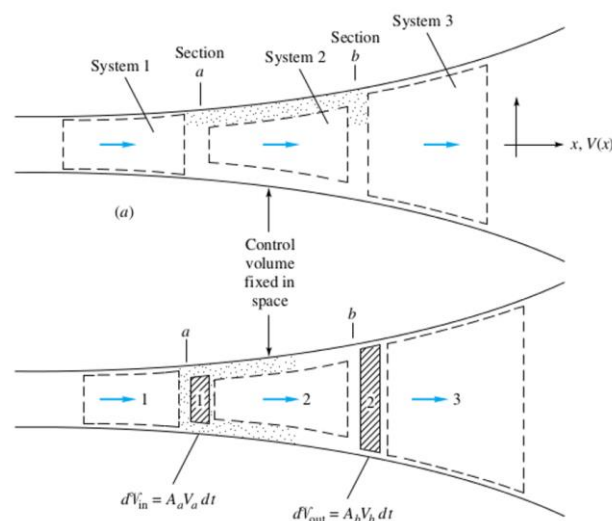


Figura 3: Volumen de control fijo unidimensional (*Fluid Mechanics – Frank M. White*)

En el instante,  $t + dt$ , el sistema 2 comenzó a moverse, y una porción del sistema 1 ingresó al volumen de control desde la izquierda. Las porciones sombreadas de la figura 3 muestran el volumen saliente  $A_b v_b dt$  y el volumen entrante  $A_a v_a dt$ .

Sea  $B$  una propiedad del fluido, y  $\beta = dB/dm$  la propiedad intensiva. Así, la cantidad total de  $B$  en el volumen de control es:

$$B_{VC} = \int_{VC} \beta \rho dV \quad (9)$$

$$\beta = \frac{dB}{dm} \quad (10)$$

donde  $\rho dV$  es un diferencial de masa del fluido. El objetivo, es relacionar la tasa de cambio de  $B$  en el volumen de control ( $B_{VC}$ ) con la tasa de cambio de  $B$  en el sistema 2, que como se mencionó anteriormente es coincidente con el volumen de control en el instante  $t$ . Para lograr esta relación se expresa la derivada temporal de  $B_{VC}$  como sigue:

$$\frac{d}{dt}(B_{VC}) = \frac{1}{dt} B_{VC}(t + dt) - \frac{1}{dt} B_{VC}(t) \quad (11)$$

$$= \frac{1}{dt} [B_2(t + dt) - (\beta \rho V)_{sal} + (\beta \rho V)_{ent}] - \frac{1}{dt} [B_2(t)] \quad (12)$$

$$= \frac{1}{dt} [B_2(t + dt) - B_2(t)] - (\beta \rho V)_{sal} + (\beta \rho V)_{ent} \quad (13)$$

El primer término de la derecha es la tasa de cambio de  $B$  en el sistema 2 en el instante que ocupa el volumen de control. Reordenando la última línea de la ecuación anterior se obtiene la relacionada buscada.

$$\frac{d}{dt}(B_{sist}) = \frac{1}{dt} \left( \int_{VC} \beta \rho dV \right) + (\beta \rho dV)_{sal} - (\beta \rho dV)_{ent} \quad (14)$$

Esta ecuación expresa el teorema de transporte de Reynolds para un volumen de control fijo y unidimensional. Los tres términos de la derecha representan:

1. La tasa de cambio de  $B$  en el volumen de control
2. El flujo de  $B$  saliendo del volumen de control
3. El flujo de  $B$  entrando al volumen de control

**Volumen de control fijo unidimensional.** La ecuación general para un volumen de control fijo con un flujo arbitrario es:

$$\frac{d}{dt}(B_{sist}) = \frac{d}{dt} \left( \int_{VC} \beta \rho V \right) + \int_{VC} \beta \rho V \cos \theta dA_{sal} - \int_{VC} \beta \rho V \cos \theta dA_{ent} \quad (15)$$

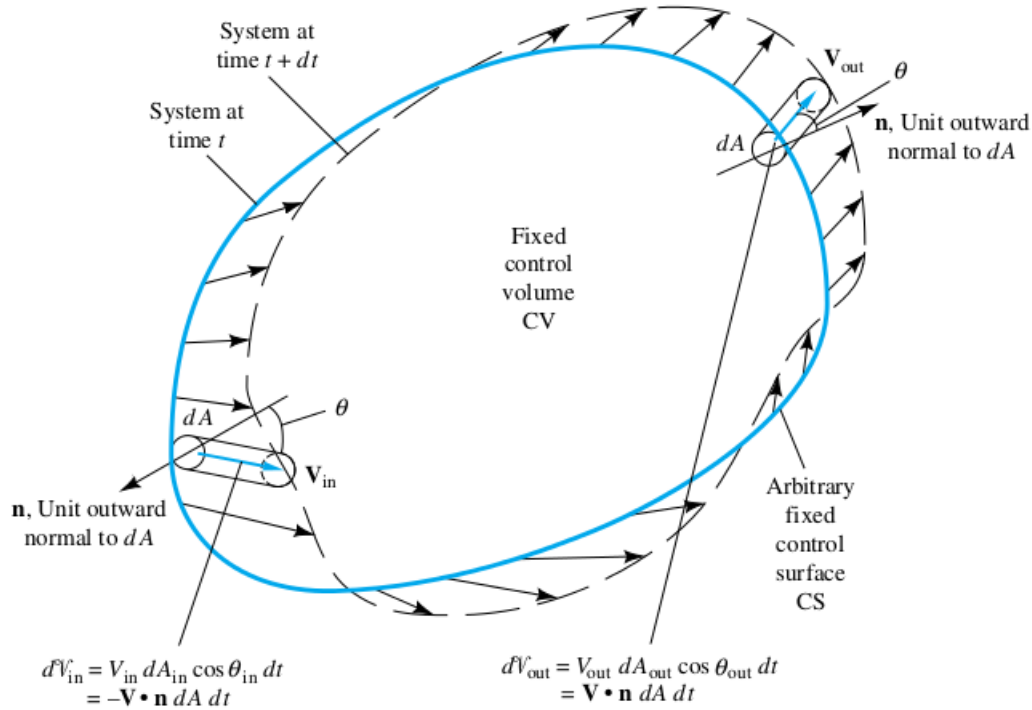


Figura 4: Volumen de control fijo con flujo arbitrario (*Fluid Mechanics – Frank M. White*)

La forma compacta del teorema de transporte de Reynolds es

$$\frac{d}{dt}(B_{syst}) = \frac{d}{dt} \left( \int_{VC} \beta \rho dV \right) + \int_{VC} \beta \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA \quad (16)$$

#### 5.1.1.2. Conservación de la masa.

Para conservación de masa  $B = m$  y  $\beta = dm/dm = 1$ . Entonces,

$$\left( \frac{dm}{dt} \right)_{sist} = 0 = \frac{d}{dt} \left( \int_{VC} \rho dV \right) + \int_{VC} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA \quad (17)$$

### 5.1.1.3. Conservación de la cantidad de movimiento.

En este caso  $\vec{B} = m\vec{v}$  y  $\vec{\beta} = d\vec{B}/dm = \vec{v}$  y la expresión del teorema de Reynolds es

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v})_{sist} = \sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \left( \int_{VC} \vec{v}\rho dV \right) + \int_{SC} \vec{v}\rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dA \quad (18)$$

Es importante tener en cuenta los siguientes puntos:

1.  $\vec{v}$  es la velocidad del fluido relativa a un sistema de referencia no inercial (no acelerado). Se desarrollará más adelante el caso de un sistema de referencia inercial.

2.  $\sum \vec{F}$  es la suma vectorial de todas las fuerzas actuando sobre el volumen de control, incluyendo todas las fuerzas superficiales y volumétricas.

### 5.1.2. Enfoque diferencial

#### 5.1.2.1. Campo de aceleraciones de un fluido.

El vector velocidad en ejes cartesianos es:

$$\vec{v}(r, t) = \hat{i}u(x, y, z, t) + \hat{j}v(x, y, z, t) + \hat{k}w(x, y, z, t) \quad (19)$$

Es necesario calcular el campo vectorial  $\mathbf{a}$  del flujo para poder escribir la segunda ley de Newton para un sistema fluido infinitesimal.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \hat{i} \frac{du}{dt} + \hat{j} \frac{dv}{dt} + \hat{k} \frac{dw}{dt} \quad (20)$$

Como cada componente  $(u, v, w)$  es una función de cuatro variables  $(x, y, z, t)$ , se utiliza la regla de la cadena para obtener la derivada temporal:

$$\frac{du(x, y, z, t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (21)$$

Pero, por definición,  $dx/dt$  es la componente local de la velocidad  $u$ , y  $dy/dt = v$ , y  $dz/dt = w$ . La derivada total de  $u$  con respecto al tiempo es:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)u \quad (22)$$

Las mismas expresiones se obtienen para  $v$  y para  $w$ . Entonces, el vector aceleración es:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left( u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \quad (23)$$

El término  $\partial \vec{v} / \partial t$  se denomina aceleración local, el cual desaparece cuando se estudia un flujo estacionario (independiente del tiempo). Los tres términos entre paréntesis conforman la aceleración convectiva.

La derivada temporal total se conoce como derivada material y puede ser aplicada a cualquier variable, por ejemplo, a la presión,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) p \quad (24)$$

### 5.1.2.2. Ecuación diferencial de conservación de masa.

Para encontrar la ecuación diferencial de conservación de masa se selecciona un volumen de control fijo infinitesimal ( $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ ) y se utilizan las ecuaciones de volumen de control descritas anteriormente.

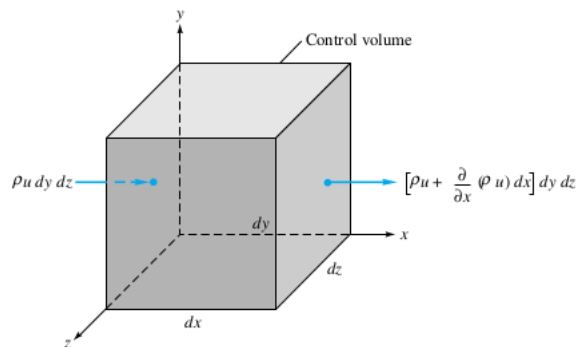


Figura 5: Volumen de control fijo infinitesimal (*Fluid Mechanics – Frank M. White*)

El flujo por cada lado del cubo mostrado es aproximadamente unidimensional, por eso la ecuación de conservación de masa adecuada es:

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \sum_i (\rho_i A_i v_i)_{sal} - \sum_i (\rho_i A_i v_i)_{ent} = 0 \quad (25)$$

Por ser un elemento diferencial, la integral de volumen se reduce a un término diferencial:

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \quad (26)$$



Existe flujo de masa en las seis caras del cubo, tres de entrada y tres de salida. Se muestra una sola dirección en la figura por simplicidad. Considerando que la propiedad ( $B$ ) evaluada es una función continua en el espacio, entonces la variación en la dirección del eje  $x$  en el elemento está dada por  $\partial B / \partial x dx$ . Lo mismo sucede en las otras dos direcciones,  $y$  y  $z$ . De esta manera, los flujos entrantes y salientes de masa en las seis caras del cubo son:

Tabla I: Flujos máxicos entrantes y salientes al volumen de control

Cara	Flujo máxico entrante	Flujo máxico saliente
$x$	$\rho u dy dz$	$[\rho u \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx] dy dz$
$y$	$\rho v dx dz$	$[\rho v \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dy] dx dz$
$z$	$\rho w dx dy$	$[\rho w \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dz] dx dy$

Fuente: (*Fluid Mechanics – Frank M. White*)

Introduciendo estos términos en la ecuación (25),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dx dy dz = 0 \quad (27)$$

El elemento de volumen  $dx dy dz$  se cancela en todos los términos y se obtiene la ecuación deseada:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0 \quad (28)$$

Esta es la ecuación diferencial de conservación de masa, también denominada ecuación de continuidad porque el único requisito es que la densidad y velocidad del fluido sean funciones continuas. Se puede expresar en forma simplificada como sigue:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (29)$$

### 5.1.2.3. Ecuación diferencial de conservación de cantidad de movimiento.

El mismo procedimiento que para conservación de masa se aplica para conservación de cantidad de movimiento. De esta forma, la ecuación integral es:

$$\Sigma \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{CV} \vec{v} \rho dV \right) + \sum_i (\dot{m}_i \vec{v}_i)_{sal} - \sum_i (\dot{m}_i \vec{v}_i)_{ent} \quad (30)$$

Al igual que en conservación de masa, la integral de volumen se simplifica:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{CV} \vec{v} \rho dV \right) \approx \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) dx dy dz \quad (31)$$

El flujo de momento ocurre también en las seis caras del cubo diferencial de la

Figura 5:

Tabla II: Flujos de momento entrantes y salientes al volumen de control

Cara	Flujo de momento entrante	Flujo de momento saliente
x	$\rho u \vec{v} dy dz$	$[\rho u \vec{v} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \vec{v}) dx] dy dz$
y	$\rho v \vec{v} dx dz$	$[\rho v \vec{v} \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \vec{v}) dy] dx dz$
z	$\rho w \vec{v} dx dy$	$[\rho w \vec{v} \frac{\partial}{\partial z} (\rho w \vec{v}) dz] dx dy$

Fuente: (*Fluid Mechanics – Frank M. White*)

Entonces,

$$\Sigma \vec{F} = dx dy dz \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w \vec{v}) \right] \quad (32)$$

Se puede simplificar la ecuación si se exponen los términos entre barras como sigue:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w \vec{v}) = \\ & = \vec{v} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right] + \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

El término entre barras es la ecuación de continuidad (se anula) y el término entre paréntesis es la aceleración total de una partícula que está ocupando el volumen de control de forma instantánea. Entonces, la ecuación (33), se reduce a:

$$\Sigma \vec{F} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dx dy dz \quad (34)$$

Lo que se acaba de demostrar no es más que la segunda ley de Newton. La suma de fuerzas incluye dos tipos, volumétricas y superficiales. Las fuerzas volumétricas son debido a campos externos (gravedad, magnetismo, potencial eléctrico, etc.) y actúan sobre todo el cuerpo. La fuerza de gravedad sobre el volumen de control es:

$$d\vec{F}_{grav} = \rho \vec{g} dx dy dz \quad (35)$$

Las fuerzas superficiales son debido a tensiones en los lados de la superficie de control. Estas tensiones se componen por la suma de la presión hidrostática y la tensión viscosa

$\tau_{ij}$ :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -p + \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & -p + \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & -p + \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Lo que causa una fuerza neta no son las tensiones mencionadas sino los gradientes de estas.

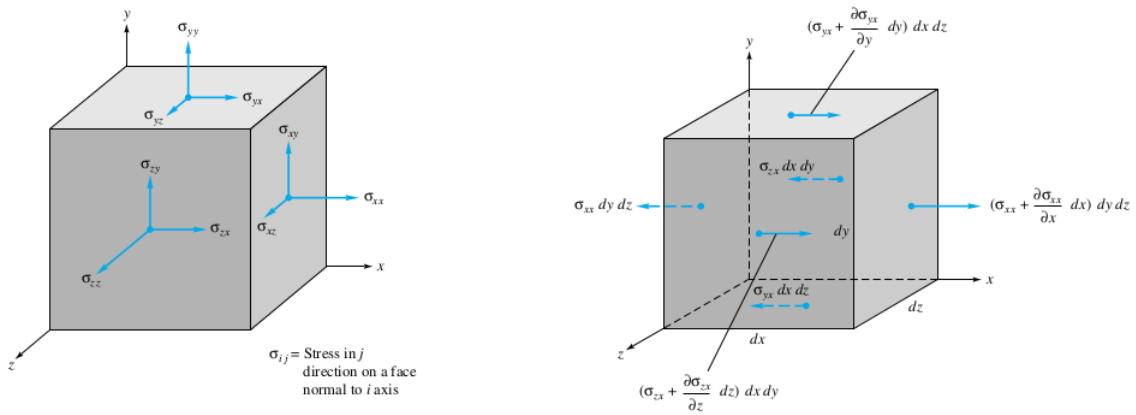


Figura 6: Fuerzas superficiales sobre un elemento infinitesimal (*Fluid Mechanics – Frank M. White*)

Por ejemplo, si se evalúan las fuerzas en la dirección  $x$ , se ve que la fuerza ejercida sobre la cara izquierda  $\sigma_{xx} dy dz$  se compensa con la de la cara opuesta  $\sigma_{xx} dy dz$ , quedando como fuerza neta sobre la cara derecha  $(\partial \sigma_{xx} / \partial x) dy dz$ .

Lo mismo ocurre en las otras cuatro caras del cubo. Por lo tanto, la fuerza neta en la dirección  $x$  está dada por:

$$dF_{x,superf} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx}) + \frac{\partial}{\partial xy} (\sigma_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zx}) \right] dx dy dz \quad (37)$$

Reemplazando los términos  $\sigma_{xx}$   $\sigma_{yx}$   $\sigma_{zx}$ ,

$$\frac{dF_x}{dV} = \frac{-p}{x} + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx}) \quad (38)$$

De igual manera se puede obtener las fuerzas por unidad de volumen en la superficie de control en las direcciones faltantes:

$$\frac{dF_y}{dV} = \frac{-p}{y} + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zy}) \quad (39)$$

$$\frac{dF_z}{dV} = \frac{-p}{z} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zz})$$

De forma vectorial:

$$\left(\frac{d\vec{F}}{dV}\right)_{superf} = -\nabla p + \left(\frac{d\vec{F}}{dV}\right)_{visc} \quad (40)$$

donde la fuerza viscosa tiene nueve términos,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{F}}{dV}\right)_{superf} = & -\nabla p + \left(\frac{d\vec{F}}{dV}\right)_{visc} \\ & + \hat{i}\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right) \\ & + \hat{j}\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right) \\ & + \hat{k}\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right) \end{aligned} \quad (41)$$

Simplificando:

$$\left(\frac{d\vec{F}}{dV}\right)_{visc} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij} \quad \text{donde } \boldsymbol{\tau}_{ij} = \begin{bmatrix} -\tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & -\tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & -\tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (42)$$

es el tensor de viscosidad actuando sobre el elemento infinitesimal. La fuerza superficial es entonces la suma del gradiente de presión y la divergencia del tensor viscosidad. Entonces, la ecuación de conservación de cantidad de movimiento es:

$$\rho \vec{g} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (43)$$

Esta ecuación es válida para cualquier fluido para cualquier tipo de flujo.

**Fluidos newtonianos.** En un fluido newtoniano las tensiones viscosas son proporcionales a la velocidad de deformación del fluido y al coeficiente de viscosidad  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \tau_y = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \end{aligned} \quad (44)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial de cantidad de movimiento se obtiene en forma expandida:

$$\begin{aligned}\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) &= \rho \frac{du}{dt} \\ \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) &= \rho \frac{dv}{dt} \\ \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) &= \rho \frac{dw}{dt}\end{aligned}\quad (45)$$

Y en forma compacta:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \nu \cdot \nabla^2 \cdot \vec{v} + \vec{g}\quad (46)$$

### 5.1.3. Ecuaciones de Navier – Stokes en sistema de referencia rotante

Un sistema de referencia rotante es un caso especial de un sistema de referencia no inercial, que está rotando relativo a un sistema de referencia inercial.

En todos los sistemas de referencia no inerciales existen fuerzas ficticias. En este caso, las fuerzas ficticias son dos: fuerza centrífuga y fuerza de Coriolis. En el caso de tratar con un sistema de referencia rotante no uniforme existe una fuerza más llamada fuerza de Euler.

#### 5.1.3.1. Relación entre sistema de referencia rotante y estacionario

**Relación entre posiciones en los dos sistemas de referencia.** Para encontrar la expresión de las fuerzas ficticias, es necesario conocer la relación entre coordenadas expresadas en el sistema de referencia rotante  $(x', y', z')$  y coordenadas expresadas en un sistema de referencia inercial  $(x, y, z)$  con el mismo origen. Si la rotación se produce sobre el eje  $z$  con una velocidad angular  $\Omega$  y los dos sistemas coinciden en el tiempo  $t = 0$ , entonces la transformación tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}x &= x' \cos(\theta(t)) - y' \sin(\theta(t)) \\ y &= x' \sin(\theta(t)) + y' \cos(\theta(t))\end{aligned}\quad (47)$$

siendo la transformación inversa:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos(-\theta(t)) - y \sin(-\theta(t)) \\ y' &= x \sin(-\theta(t)) + y \cos(-\theta(t))\end{aligned}\quad (48)$$

Para su uso posterior se introducen los vectores unitarios  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  que representan los versores del sistema de referencia rotante, expresados en el sistema de referencia inercial:

$$\begin{aligned}\hat{i}(t) &= (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t))) \\ \hat{j}(t) &= (-\sin(\theta(t)), \cos(\theta(t)))\end{aligned}\quad (49)$$

La derivada temporal de estos vectores es:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{i}}(t) &= \Omega(-\sin(\theta(t)), \cos(\theta(t))) = \Omega\hat{\mathbf{j}} \\ \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{j}}(t) &= \Omega(-\cos(\theta(t)), -\sin(\theta(t))) = -\Omega\hat{\mathbf{i}}\end{aligned}\quad (50)$$

donde  $\vec{\Omega} \equiv d\theta(t)/dt$ . Se llega al mismo resultado que realizando el producto vectorial entre el vector rotación  $\vec{\Omega} = (0,0,\Omega)$  en la dirección del eje Z y el vector unitario estudiado:

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{u}} = \vec{\Omega} \times \hat{\mathbf{u}} \quad (51)$$

donde  $\hat{\mathbf{u}}$  es  $\hat{\mathbf{i}}$  o  $\hat{\mathbf{j}}$ .

**Derivadas temporales en los dos sistemas de referencia.** Si queremos evaluar la derivada temporal de una función expresada en el sistema de referencia rotante es necesario utilizar la última ecuación.

$$\vec{\mathbf{f}}(t) = f_x(t)\hat{\mathbf{i}} + f_y(t)\hat{\mathbf{j}} + f_z(t)\hat{\mathbf{k}} \quad (52)$$

Utilizando la regla de la cadena podemos obtener la primera derivada temporal,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vec{\mathbf{f}} &= \frac{df_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt}f_x + \frac{df_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt}f_y + \frac{df_z}{dt}\hat{\mathbf{k}} + \frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt}f_z \\ &= \frac{df_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{df_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{df_z}{dt}\hat{\mathbf{k}} + [\vec{\Omega} \times (f_x\hat{\mathbf{i}} + f_y\hat{\mathbf{j}} + f_z\hat{\mathbf{k}})] \\ &= \left(\frac{d\vec{\mathbf{f}}}{dt}\right)_r + \vec{\Omega} \times \vec{\mathbf{f}}(t)\end{aligned}\quad (53)$$

**Relación entre velocidades en los dos sistemas de referencia.** La velocidad de una partícula es la derivada temporal de su posición:

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \quad (54)$$

La derivada temporal de un vector posición  $\vec{\mathbf{r}}(t)$  en un sistema de referencia rotante tiene dos componentes, una debido al propio movimiento de la partícula y otra debido a la rotación del sistema. Las velocidades en los dos sistemas están relacionadas por la siguiente ecuación:

$$\vec{\mathbf{v}}_i = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \left(\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\right)_r + \vec{\Omega} \times \vec{\mathbf{r}} \quad (55)$$

donde el subíndice  $i$  representa al sistema de referencia inercial y  $r$  al sistema de referencia rotante.

**Relación entre aceleraciones en los dos sistemas de referencia.** La aceleración es la segunda derivada de la posición, o primera derivada temporal de la velocidad:

$$\vec{a}_i = \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_i = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_i = \left[\left(\frac{d}{dt}\right)_r + \vec{\Omega} \times\right] \left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_r + \vec{\Omega} \times \vec{r}\right] \quad (56)$$

Derivando y reordenando se obtiene:

$$\vec{a}_r = \vec{a}_i - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r - \dot{\vec{\Omega}} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} \quad (57)$$

donde  $\vec{a}_r = \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_r$  es la aceleración aparente en el sistema de referencia rotante, el término  $-\dot{\vec{\Omega}} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$  representa la aceleración centrífuga, y el término  $-2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r$  es la fuerza Coriolis.

**Ecuaciones de Navier-Stokes en sistema de referencia inercial con velocidad absoluta.** Considerando viscosidad y densidad constante las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{v}_i}{Dt} &= -\nabla \left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu \nabla \cdot \nabla (\vec{v}_i) \quad \nabla \cdot \vec{v}_i = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \nabla \vec{v}_i &= -\nabla \left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu \nabla \cdot \nabla (\vec{v}_i) \quad \nabla \cdot \vec{v}_i = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}_i \times \vec{v}_i) - \underbrace{(\nabla \cdot \vec{v}_i) \vec{v}_i}_0 &= -\nabla \left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu \nabla \cdot \nabla (\vec{v}_i) \quad \nabla \cdot \vec{v}_i = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}_i \times \vec{v}_i) &= -\nabla \left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu \nabla \cdot \nabla (\vec{v}_i) \quad \nabla \cdot \vec{v}_i = 0 \end{aligned} \quad (58)$$

**Ecuaciones de Navier-Stokes en sistema de referencia rotante con velocidad relativa.** Haciendo uso de las ecuaciones (57) y (58) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{v}_i}{Dt} &= -\nabla \left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu \nabla \cdot \nabla (\vec{v}_i) \quad \nabla \cdot \vec{v}_i = 0 \\ \frac{D\vec{v}_i}{Dt} &= \frac{\partial \vec{v}_r}{\partial t} + \vec{v}_r \cdot \nabla \vec{v}_r + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r} \\ \frac{D\vec{v}_i}{Dt} &= \frac{\partial \vec{v}_r}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}_r \times \vec{v}_r) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r} \end{aligned} \quad (59)$$

dado que  $\nabla \cdot \vec{v}_r = \nabla \cdot \vec{v}_i = 0$  la ecuación se puede reescribir como:

$$\frac{\partial \vec{v}_r}{\partial t} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times r + \nabla \cdot (\vec{v}_r \times \vec{v}_r) + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla \cdot \nabla (\vec{v}_r) \quad (60)$$

$$\nabla \cdot \vec{v}_r = 0$$

Esto representa la ecuación de Navier Stokes para flujo incompresible en un sistema de referencia rotante, en términos de la velocidad relativa.

**Ecuaciones de Navier Stokes en sistema de referencia rotante con velocidad absoluta.** La ecuación (60) se puede desarrollar más si se expande el término  $\nabla \cdot (\vec{v}_r \times \vec{v}_r)$ :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{v}_r \times \vec{v}_r) &= \nabla \cdot (\vec{v}_r \times [\vec{v}_i - \vec{\Omega} \times \vec{r}]) \\ &= \nabla \cdot (\vec{v}_r \times \vec{v}_i) - \underbrace{\nabla \cdot \vec{v}_r}_0 (\vec{\Omega} \times r - \vec{v}_r \cdot \nabla (\vec{\Omega} \times \vec{r})) \\ &= \nabla \cdot (\vec{v}_r \times \vec{v}_i) - \vec{\Omega} \times \vec{r} \end{aligned} \quad (61)$$

Entonces, los términos estacionarios de la ecuación (60) pueden escribirse como sigue:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{v}_r \times \vec{v}_r) + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r} &= \nabla \cdot (\vec{v}_r \times \vec{v}_i) - \vec{\Omega} \times r + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r} \\ &= \nabla \cdot (\vec{v}_r \times \vec{v}_i) - \vec{\Omega} \times \vec{r} \\ &= \nabla \cdot (\vec{v}_r \times \vec{v}_i) + \vec{\Omega} \times (\vec{v}_r + \vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ &= \nabla \cdot (\vec{v}_r \times \vec{v}_i) + \vec{\Omega} \times \vec{v}_i \end{aligned} \quad (62)$$

Entonces, la ecuación (60) puede ser reescrita en términos de la velocidad absoluta:

$$\frac{\partial \vec{v}_r}{\partial t} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} + \nabla \cdot (\vec{v}_r \times \vec{v}_i) + \vec{\Omega} \times \vec{v}_i = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla \cdot \nabla (\vec{v}_i) \quad \nabla \cdot \vec{v}_i = 0 \quad (63)$$

## 5.2. Teoría numérica.

Obtenidas las ecuaciones matemáticas que describen el comportamiento de una turbomáquina, ahora es necesario exponer el método numérico para resolverlas.

El método utilizado por OpenFOAM se denomina método de volúmenes finitos, y está basado principalmente en el concepto de volumen de control descrito anteriormente.

En primer lugar, se hará el desarrollo del método de volúmenes finitos para cualquier propiedad del fluido desde la ecuación más sencilla, difusión pura en estado estacionario y en una dimensión, para luego avanzar en complejidad hasta la ecuación general de transporte.



Luego, se desarrollarán los algoritmos (SIMPLE, PISO) utilizados para la resolución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes descriptas anteriormente.

La ecuación general de transporte será utilizada como punto de partida:

$$\frac{\partial(\rho B)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho B u) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla B) + S_B \quad (64)$$

donde  $B$ , es una propiedad del fluido,  $\Gamma$  es el coeficiente de difusión y  $S$  es una fuente.

### 5.2.1. Volúmenes finitos para flujo difusivo.

Si se eliminan los términos convectivo y transitorio, entonces se obtiene la forma más simple del proceso de transporte:

$$\nabla \cdot (\Gamma \nabla B) + S_B = 0 \text{ y,} \quad (65)$$

$$\frac{d}{dx} \cdot \left( \Gamma \frac{dB}{dx} \right) + S_B = 0 \text{ en una dimensión.}$$

#### Paso 1. Generación de malla

El primer paso en el método de volúmenes finitos es dividir el dominio en volúmenes de control como se muestra a continuación:

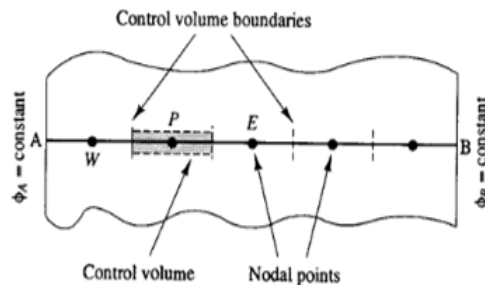


Figura 7: Volumen de control (*Computational Fluid Dynamics. H K Versteeg*)

Se colocan una cierta cantidad de celdas en el espacio entre el punto  $A$  y  $B$ . Las caras o bordes de cada volumen de control se posicionan equidistante a dos nodos adyacentes. A continuación, se muestra la convención de nomenclaturas que se utilizarán más adelante:

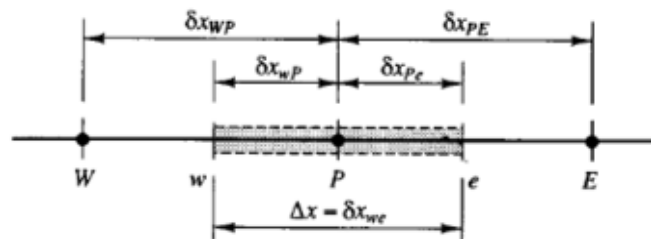


Figura 8: Nomenclaturas de un volumen de control (*Computational Fluid Dynamics. H K Versteeg*)

Un nodo en general se identifica como  $P$ , y sus nodos vecinos  $W$  (west, izquierda) y  $E$  (east, derecha). La cara izquierda del volumen de control es  $w$ , y la derecha  $e$ . La distancia entre los nodos  $W$  y  $P$ , y entre  $P$  y  $E$ , se identifican como  $\delta x_{WP}$  y  $\delta x_{PE}$  respectivamente. De igual modo las distancias entre la cara  $w$  y el nodo  $P$ , y el nodo  $P$  con la cara  $e$ , se denominan  $\delta x_{wP}$  y  $\delta x_{Pe}$ . Por último, el ancho del volumen de control es  $\Delta x = \delta x_{we}$ .

### Paso 2. Discretización

El paso clave en el método de volúmenes finitos es la integración de las ecuaciones sobre el volumen de control y usar el Teorema de Gauss para poder obtener una ecuación discretizada. Para el volumen de control definido anteriormente la integración es como sigue:

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{dB}{dx} \right) dV + \int_{\Delta V} S dV = \left( \Gamma A \frac{dB}{dx} \right)_e - \left( \Gamma A \frac{dB}{dx} \right)_w + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (66)$$

donde  $A$  es la sección transversal de la cara del volumen de control,  $\Delta V$  es el volumen, y  $\bar{S}$  es el valor promedio de la fuente  $S$  en el volumen de control. La ecuación (66), tiene una clara interpretación física: el flujo difusivo que sale por la cara derecha menos el flujo difusivo que entra por la cara izquierda es igual al flujo generado.

Es necesario obtener los valores de  $B$  y  $\Gamma$ , para poder obtener la ecuación buscada. Para ello se realiza una aproximación lineal, denominada diferencias centrales:

$$\begin{aligned} \Gamma_w &= \frac{\Gamma_W + \Gamma_P}{2} \\ \Gamma_e &= \frac{\Gamma_P + \Gamma_E}{2} \end{aligned} \quad (67)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \left( \Gamma A \frac{dB}{dx} \right)_e &= \Gamma_e A_e \left( \frac{B_E - B_P}{\delta x_{PE}} \right) \\ \left( \Gamma A \frac{dB}{dx} \right)_w &= \Gamma_w A_w \left( \frac{B_P - B_W}{\delta x_{WP}} \right) \end{aligned} \quad (68)$$

Además, linearizando la función  $\bar{S}$ , siendo  $S_u$  el término constante (*Solución del problema de convección utilizando volumen finito y algoritmos paralelos. Luis Miguel de la Cruz Salas*):

$$\bar{S} \Delta V = S_u + S_p B_p \quad (69)$$

Sustituyendo,

$$\Gamma_e A_e \left( \frac{B_E - B_P}{\delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left( \frac{B_P - B_W}{\delta x_{\phi}} \right) + (S_u + S_p B_p) = 0 \quad (70)$$

$$\left( \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e + \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w - S_p \right) B_P = \left( \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w \right) B_W + \left( \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e \right) B_E + S_u$$

Se denomina,

$$a_W = \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w \quad a_E = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e a_P = a_W + a_E - S_p \quad (71)$$

Entonces se llega a la ecuación buscada:

$$a_P B_P = A_W B_W + A_E B_E + S_u \quad (72)$$

### Paso 3. Solución de la ecuación

La ecuación anterior se resuelve en todos los nodos dispuestos anteriormente en el dominio del problema. Para aquellos volúmenes de control que son adyacentes al borde del dominio, se modifica la ecuación para incorporar las condiciones de borde. El sistema de ecuaciones algebraicas lineales resultante es resuelto para obtener el valor de la propiedad evaluada  $B$  en cada centro de celda.

Es sencillo ahora obtener las mismas ecuaciones para un sistema tridimensional.

Sintéticamente,

$$a_P B_P = A_W B_W + A_E B_E + A_S B_S + A_N B_N + A_B B_B + A_T B_T + S_u$$

$a_W$	$a_E$	$a_S$	$a_N$	$a_B$	$a_T$	$a_P$
$\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}$	$\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}$	$\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}$	$\frac{\Gamma_b A_b}{\delta z_{BP}}$	$\frac{\Gamma_t A_t}{\delta z_{PT}}$	$a_W + a_E + a_S +$ $a_N + a_B + a_T - S_p$

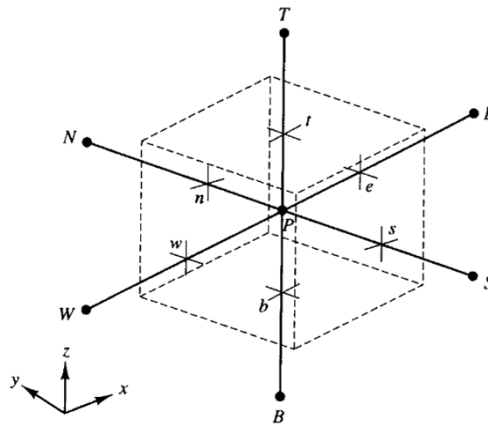
(73)


Figura 9: Volumen de control en tres dimensiones (*Computational Fluid Dynamics. H K Versteeg*)

### 5.2.2. Volúmenes finitos para flujo difusivo convectivo estacionario.

La ecuación de transporte para un fenómeno difusivo convectivo estacionario puede ser obtenida de la ecuación general eliminando el término transitorio.

$$\nabla \cdot (\rho B u) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla B) + S_B \quad (74)$$

Integrando sobre el volumen de control se obtiene,

$$\int_A n \cdot (\rho B u) dA = \int_A n \cdot (\Gamma \nabla B) dA + \int_{CV} S_B dV \quad (75)$$

La parte izquierda de la ecuación representa el flujo neto convectivo y la derecha el flujo neto difusivo más la generación o destrucción de la propiedad  $B$  dentro del volumen de control.

Nuevamente, se comenzará el desarrollo para el caso más simple, en una dirección y sin presencia de fuentes. La ecuación es:

$$\frac{d}{dx} (\rho u B) = \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{dB}{dx} \right) \quad (76)$$

Y por conservación de masa:

$$\frac{d(\rho u)}{dx} = 0 \quad (77)$$

La integración de la ecuación (76) sobre el volumen de control de la Figura 8 resulta:

$$(\rho u A B)_e - (\rho u A B)_w = \left( \Gamma A \frac{\partial B}{\partial x} \right)_e - \left( \Gamma A \frac{\partial B}{\partial x} \right)_w \quad (78)$$

Y la integración de la ecuación de continuidad,

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0 \quad (79)$$

Para obtener la ecuación discretizada buscada es necesario aproximar los términos de la ecuación (78). Para eso, se definen dos variables,  $F$  y  $D$ :

$$F = \rho u \quad \text{y} \quad D = \frac{\Gamma}{\delta x} \quad (80)$$

Los valores en las caras del volumen de control de las variables  $F$  y  $D$  son:

$$\begin{aligned} F_w &= (\rho u)_w & F_e &= (\rho u)_e \\ D_w &= \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} & D_e &= \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} \end{aligned} \quad (81)$$

Si se considera  $A_w = A_e = A$  y se utiliza el método de diferencias centrales para discretizar los términos difusivos, se puede expresar la ecuación (78) como:

$$F_e B_e - F_w B_w = D_e (B_E - B_P) - D_w (B_P - B_W) \quad (82)$$

Y la ecuación de continuidad,

$$F_e - F_w = 0 \quad (83)$$

Para poder resolver estas ecuaciones es necesario calcular los valores de  $B$  en las caras  $e$  y  $w$ . A continuación, se detallan algunos métodos. Por el momento, se considera que el valor de velocidad  $u$  es conocido, aunque más adelante se mostrará el algoritmo utilizado para obtenerlo.

### 5.2.2.1. Esquema de diferencias centrales.

Para una malla uniforme se pueden calcular los valores de  $B$  en las caras del volumen de control como sigue:

$$B_e = \frac{B_P + B_E}{2} \quad B_w = \frac{B_W + B_P}{2} \quad (84)$$

Sustituyendo en la ecuación (82):

$$\frac{F_e}{2} (B_P + B_E) - \frac{F_w}{2} (B_W + B_P) = D_e (B_E - B_P) - D_w (B_P - B_W) \quad (85)$$

Re-organizando,

$$\begin{aligned} [(D_w - \frac{F_w}{2}) + (D_e + \frac{F_e}{2})] B_P &= (D_w + \frac{F_w}{2}) B_W + (D_e - \frac{F_e}{2}) B_E \\ [(D_w + \frac{F_w}{2}) + (D_e - \frac{F_e}{2}) + (F_e - F_w)] B_P &= (D_w + \frac{F_w}{2}) B_W + (D_e - \frac{F_e}{2}) B_E \end{aligned} \quad (86)$$

Identificando los coeficientes de  $B_W$  y  $B_E$  como  $a_W$  y  $a_E$ , la ecuación de un proceso convectivo difusivo utilizando diferencias centrales es:

$$a_P B_P = a_W B_W + a_E B_E \quad (87)$$

donde:

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2} \quad a_E = D_e + \frac{F_e}{2} a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) \quad (88)$$

El esquema de diferencias centrales no reconoce la dirección del flujo. Esto hace que no sea un esquema conveniente para problemas convectivos donde la propiedad evaluada se transporta únicamente en el sentido del flujo.

### 5.2.2.2. Esquema “upwind”.

Este esquema tiene en cuenta el sentido del flujo al determinar el valor en la cara del volumen de control.

Cuando el flujo es positivo,  $u_w > 0, u_e > 0$  ( $F_w > 0, F_e > 0$ ), el esquema upwind determina

$$B_w = B_W \quad B_e = B_P \quad (89)$$

Y la ecuación de discretización es:

$$\begin{aligned} F_e B_P - F_w B_W &= D_e (B_E - B_P) - D_w (B_P - B_W) \\ (D_w + D_e + F_e) B_P &= (D_w + F_w) B_W + D_e B_E \end{aligned} \quad (90)$$

$$[(D_w + F_w) + D_e + (F_e - F_w)] B_P = (D_w + F_w) B_W + D_e B_E$$

Y cuando el flujo es negativo,  $u_w < 0, u_e < 0$  ( $F_w < 0, F_e < 0$ ), el esquema considera

$$B_w = B_P \quad B_e = B_E \quad (91)$$

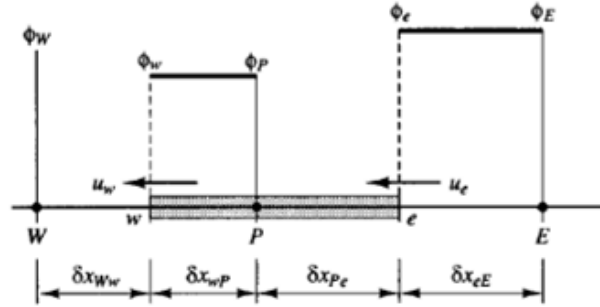


Figura 10: esquema “upwind”. (*Computational Fluid Dynamics. H K Versteeg*)

La ecuación de discretización es,

$$\begin{aligned} F_e B_E - F_w B_P &= D_e (B_E - B_P) - D_w (B_P - B_W) \\ [D_w + (D_e - F_e) + (F_e - F_w)] B_P &= D_w B_W + (D_e - F_e) B_E \end{aligned} \quad (92)$$

Identificando los coeficientes de  $B_w$  y  $B_E$  como  $a_w$  y  $a_e$  las ecuaciones (90) y (92) pueden ser escritas como sigue:

$$a_P B_P = a_W B_W + a_E B_E \quad (93)$$

Siendo,

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) \quad (94)$$

Si,

$$F_w > 0, F_e > 0 \quad \text{entonces} \quad a_W = D_w + F_w \text{ y } a_E = D_e \quad (95)$$

$$F_w < 0, F_e < 0 \quad \text{entonces} \quad a_W = D_w \text{ y } a_E = D_e - F_e$$

Para cubrir las dos direcciones del flujo se puede escribir,

$$a_W = d_W + \max(F_w; 0) \quad a_E = d_e + \max(0; -F_e) \quad (96)$$

### 5.2.2.3. Esquema mixto.

El esquema mixto es una combinación de los dos esquemas anteriores.

$$a_P B_P = a_W B_W + a_E B_e \quad (97)$$

Siendo,

$$\begin{aligned}
 a_P &= a_W + a_E + (F_e - F_w) \\
 a_W &= \max[F_w, (D_w + \frac{F_w}{2}), 0] \quad a_E = \max[-F_e, (D_e + \frac{F_e}{2}), 0]
 \end{aligned} \quad (98)$$

### 5.2.3. Algoritmos de acoplamiento presión – velocidades.

Para desarrollar los métodos de discretización anteriores se supuso que los valores de velocidad eran conocidos. En general, esto no es así, y surgen del mismo proceso de resolución junto a las otras variables del flujo evaluadas.

Las ecuaciones de transporte para cada componente de la velocidad (ecuaciones de cantidad de movimiento) pueden ser obtenidas de la ecuación general de transporte reemplazando la propiedad  $B$  por la componente de la velocidad,  $u$ ,  $v$  o  $w$ . Además, el campo de velocidad debe satisfacer la ecuación de continuidad. Considerando entonces, las ecuaciones de un flujo estacionario en dos dimensiones:

Cantidad de movimiento en  $x$ :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial u}{\partial y}) - \frac{\partial p}{\partial x} + S_u \quad (99)$$

Cantidad de movimiento en  $y$ :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial v}{\partial y}) - \frac{\partial p}{\partial y} + S_v \quad (100)$$

Ecuación de continuidad (conservación de masa)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (101)$$

La solución de las ecuaciones de cantidad de movimiento presenta dos nuevos problemas. En primer lugar, las ecuaciones tienen términos no lineales (términos del lado izquierdo). El segundo: las tres ecuaciones están acopladas debido a la presencia de cada componente de la velocidad en cada una de ellas y, además, la presencia de la presión en las dos primeras ecuaciones.

Si el campo de presión fuese conocido, la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes se acotaría a lo expuesto anteriormente.

Para el caso estudiado, de flujos incompresibles, la densidad es constante y por lo tanto independiente de la presión. Por este motivo, el acoplamiento entre la presión y la velocidad se reduce a: si el campo de presión adecuado se aplica en la ecuación de momento, entonces el campo de velocidades resultante debe satisfacer la ecuación de continuidad.

Ambos problemas surgidos de intentar resolver las ecuaciones diferenciales de Navier Stokes se pueden solucionar mediante el uso de un proceso iterativo como es el algoritmo SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations)

### 5.2.3.1. Malla escalonada.

La idea de discretización es similar a la expuesta para una propiedad general. La primera alteración se observa en la discretización espacial: el proceso consiste en evaluar las variables escalares (presión, densidad, temperatura) en los puntos nodales definidos anteriormente, pero evaluar las componentes de la velocidad en una malla escalonada como se observa a continuación:

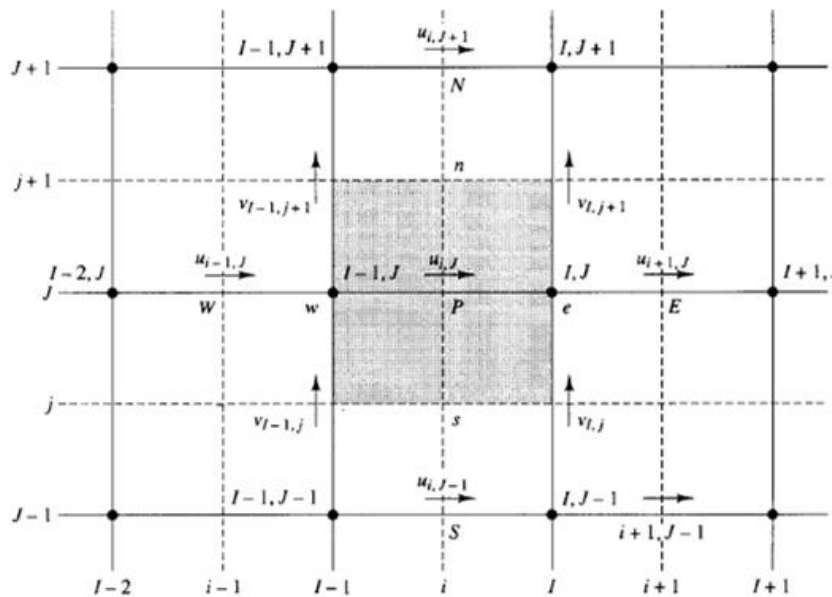


Figura 11: Malla escalonada. (*Computational Fluid Dynamics. H K Versteeg*)

Las variables escalares, incluyendo la presión, se almacenan en los puntos nodales ( $\bullet$ ). Las velocidades, en cambio, se definen en las caras de las celdas (escalares) entre nodos y son indicadas mediante flechas. Flechas horizontales ( $\rightarrow$ ) indican la ubicación de las velocidades  $u$ , mientras que flechas verticales ( $\uparrow$ ) muestran la ubicación de las velocidades  $v$ .



La malla de línea continua está numerada en mayúscula, y utiliza la siguiente numeración: en el eje  $x$  ...,  $I-1$ ,  $I$ ,  $I+1$ , ..., y en el eje  $y$ , ...,  $J-1$ ,  $J$ ,  $J+1$ , .... Lo mismo ocurre para la malla de líneas punteadas, pero en minúscula.

Los nodos o puntos donde se almacenan las variables escalares están ubicados en la intersección de dos líneas continuas ( $I,J$ ). Mientras que, las velocidades están ubicadas en la intersección de una línea continua y una punteada ( $i,J$ ).

Entonces, la ecuación de momento en el eje  $x$  discretizada utilizando la nueva malla es:

$$a_{i,J}u_{i,J} = \sum a_{nb}u_{nb} - \frac{p_{I,J} - p_{I-1,J}}{\delta x_u} \Delta V_u + \bar{S} \Delta V_u \quad (102)$$

$$a_{i,J}u_{i,J} = \sum a_{nb}u_{nb} - (p_{I,J} - p_{I-1,J})A_{i,J} + b_{i,J}$$

donde  $\Delta V_u$  es el volumen de la celda donde está ubicada la velocidad  $u$ ,  $b_{i,j} = \bar{S} \Delta V_u$  es el término fuente, y  $A_{i,J}$  es el área de la cara de la celda  $u$ . El gradiente de presión fue discretizado mediante interpolación lineal entre los nodos de presión.

En el nuevo sistema de numeración las celdas  $E$ ,  $W$ ,  $N$  y  $S$  involucradas en la suma  $\sum a_{nb}u_{nb}$  son  $(i-1,J)$ ,  $(i+1,J)$ ,  $(i,J+1)$  y  $(i, J-1)$ . Los valores de los coeficientes  $a_{i,j}$  y  $a_{nb}$  es calculado utilizando algunos de los métodos desarrollados anteriormente (upwind, mixto) adecuado para problemas convectivos-difusivos. Estos coeficientes contienen combinaciones de los parámetros  $F$  y  $D$ , que aplicando la nueva notación se obtiene:

$$F_w = (\rho u)_w = \frac{F_{i,J} + F_{i-1,J}}{2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{I,J} + \rho_{I-1,J}}{2} \right) u_{i,J} + \left( \frac{\rho_{I-1,J} + \rho_{I-2,J}}{2} \right) u_{i-1,J} \right]$$

$$F_e = (\rho u)_e = \frac{F_{i+1,J} + F_{i,J}}{2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{I+1,J} + \rho_{I,J}}{2} \right) u_{i+1,J} + \left( \frac{\rho_{I,J} + \rho_{I-1,J}}{2} \right) u_{i,J} \right]$$

$$F_s = (\rho v)_s = \frac{F_{I,J} + F_{I-1,J}}{2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{I,J} + \rho_{I,J-1}}{2} \right) v_{I,J} + \left( \frac{\rho_{I-1,J} + \rho_{I-1,J-1}}{2} \right) v_{I-1,J} \right]$$

$$F_s = (\rho v)_s = \frac{F_{I,J} + F_{I-1,J}}{2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{I,J} + \rho_{I,J-1}}{2} \right) v_{I,J} + \left( \frac{\rho_{I-1,J} + \rho_{I-1,J-1}}{2} \right) v_{I-1,J} \right] \quad (103)$$

$$D_w = \frac{\Gamma_{I-1,J}}{x_i - x_{i-1}}$$

$$D_e = \frac{\Gamma_{I,J}}{x_{i+1} - x_i}$$

$$D_s = \frac{\Gamma_{I-1,J} + \Gamma_{I,J} + \Gamma_{I-1,J-1} + \Gamma_{I,J-1}}{4(y_j - y_{j-1})}$$

$$D_n = \frac{\Gamma_{I-1,J+1} + \Gamma_{I,J+1} + \Gamma_{I-1,J} + \Gamma_{I,J}}{4(y_{J+1} - y_J)}$$

De igual manera, para v:

$$a_{I,j}v_{I,j} = \sum a_{nb}v_{nb} - (p_{I,J-1} - p_{I,J})A_{I,j} + b_{I,j} \quad (104)$$

Los elementos asociados en la suma  $\sum a_{nb}v_{nb}$  se muestran en la imagen siguiente:

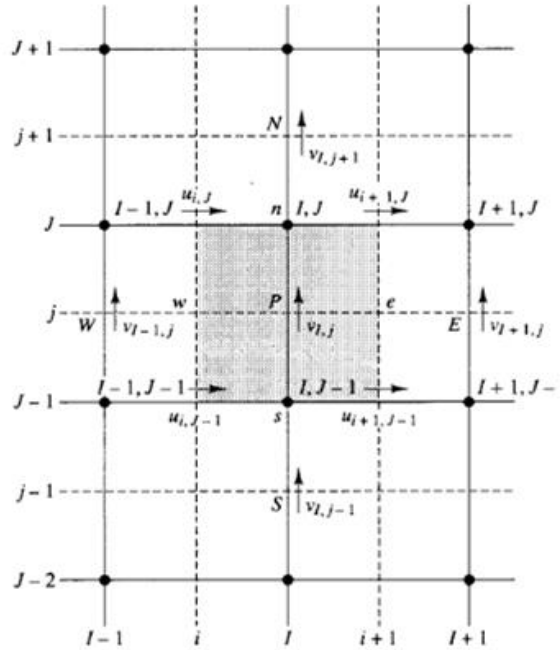


Figura 12: Malla escalonada (*Computational Fluid Dynamics. H K Versteeg*)

Los coeficientes son:

$$F_w = (\rho u)_w = \frac{F_{I,J} + F_{I,J-1}}{2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{I,J} + \rho_{I-1,J}}{2} \right) u_{i,j} + \left( \frac{\rho_{I-1,J-1} + \rho_{I,J-1}}{2} \right) u_{i,j-1} \right]$$

$$F_e = (\rho u)_e = \frac{F_{i+1,J} + F_{i+1,J-1}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{i+1,J} + \rho_{I,J}}{2} \right) u_{i+1,j} + \left( \frac{\rho_{I,J-1} + \rho_{i+1,J-1}}{2} \right) u_{i+1,j-1} \right]$$

$$F_s = (\rho v)_s = \frac{F_{I,j-1} + F_{I,j}}{2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{I,J-1} + \rho_{I,J-2}}{2} \right) v_{I,j-1} + \left( \frac{\rho_{I,J} + \rho_{I,J-1}}{2} \right) v_{I,j} \right]$$

$$F_n = (\rho v)_n = \frac{F_{I,j} + F_{I,j+1}}{2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{I,J} + \rho_{I,J-1}}{2} \right) v_{I,j} + \left( \frac{\rho_{I,J+1} + \rho_{I,J}}{2} \right) v_{I,j+1} \right]$$

$$D_w = \frac{\Gamma_{I-1,J-1} + \Gamma_{I,J-1} + \Gamma_{I-1,J} + \Gamma_{I,J}}{4(x_I - x_{I-1})}$$

$$D_e = \frac{\Gamma_{I,J-1} + \Gamma_{I+1,J-1} + \Gamma_{I,J} + \Gamma_{I+1,J}}{4(x_{I+1} - x_I)}$$

$$D_s = \frac{\Gamma_{I,J-1}}{y_j - y_{j-1}}$$

$$D_n = \frac{\Gamma_{I,J}}{y_{j+1} - y_j}$$

### 5.2.3.2. Algoritmo SIMPLE.

Para inicializar el algoritmo SIMPLE, empleado para resolver las ecuaciones de Navier Stokes, se utiliza un campo de presión estimado,  $\hat{p}$ . Así, se resuelven las ecuaciones de cantidad de movimiento discretizadas obteniendo las componentes de la velocidad:  $\hat{u}$  y  $\hat{v}$ :

$$a_{i,j}u_{i,j}^o = \sum a_{nb}u_{nb}^o - (p_{I,J}^o - p_{I-1,J}^o)A_{i,j} + b_{i,j}$$

$$a_{I,j}v_{I,j} = \sum a_{nb}v_{nb} - (p_{I,J-1} - p_{I,J})A_{I,j} + b_{I,j}$$
(106)

Se define el valor de corrección de presión,  $p'$ , como la diferencia entre el valor correcto y el estimado:

$$p = \hat{p} + p' \quad (107)$$

De igual manera, se definen los valores de corrección de las velocidades:

$$u = \hat{u} + u'$$

$$v = \hat{v} + v'$$
(108)

Si se restan las ecuaciones (106), de las ecuaciones (102) y (104), se obtiene:

$$a_{i,j}(u_{i,j} - u_{i,j}^o) = \sum a_{nb}(u_{nb} - u_{nb}^o) + [(p_{I-1,J} - p_{I-1,J}^o) - (p_{I,J} - p_{I,J}^o)]A_{i,j}$$

$$a_{I,j}(v_{I,j} - v_{I,j}^o) = \sum a_{nb}(v_{nb} - v_{nb}^o) + [(p_{I,J-1} - p_{I,J-1}^o) - (p_{I,J} - p_{I,J}^o)]A_{I,j}$$
(109)

Utilizando los valores de corrección se pueden reescribir:

$$a_{i,j}u'_{i,j} = \sum a_{nb}u'_{nb} + (p'_{I-1,J} - p'_{I,J})A_{i,j}$$

$$a_{I,j}v'_{I,j} = \sum a_{nb}v'_{nb} + (p'_{I,J-1} - p'_{I,J})A_{I,j}$$
(110)

Para simplificar las ecuaciones anteriores, el algoritmo SIMPLE omite los términos  $\sum a_{nb}u'_{nb}$  y  $\sum a_{nb}v'_{nb}$ :

$$u'_{i,j} = d_{i,j}(p'_{I-1,J} - p'_{I,J})$$

$$v'_{I,j} = d_{I,j}(p'_{I,J-1} - p'_{I,J})$$
(111)

donde  $d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}}$  y  $d_{I,j} = \frac{A_{I,j}}{a_{I,j}}$ . Estas ecuaciones describen las correcciones que

deben ser aplicadas a las ecuaciones (108), resultando:

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= u_{i,j}^{\circ} + d_{i,j}(p'_{I-1,j} - p'_{I,j}) \\ v_{I,j} &= v_{I,j}^{\circ} + d_{I,j}(p'_{I-1,j} - p'_{I,j}) \end{aligned} \quad (112)$$

Expresiones de la misma forma se obtienen para  $u_{i+1,j}$  y  $u_{I,j+1}$ :

$$\begin{aligned} u_{i+1,j} &= u_{i+1,j}^{\circ} + d_{i+1,j}(p'_{I,j} - p'_{I+1,j}) \\ v_{I,j+1} &= v_{I,j+1}^{\circ} + d_{I,j+1}(p'_{I,j} - p'_{I,j+1}) \end{aligned} \quad (113)$$

Como se mencionó anteriormente, se debe satisfacer la ecuación de conservación de masa, que en forma discreta resulta:

$$[(\rho u A)_{i+1,j} - (\rho u A)_{i,j}] + [(\rho v A)_{I,j+1} - (\rho v A)_{I,j}] = 0 \quad (114)$$

Sustituyendo los valores de velocidad por las ecuaciones (112):

$$\begin{aligned} &[\rho_{i+1,j} A_{i+1,j} (u_{i+1,j}^{\circ} + d_{i+1,j}(p'_{I,j} - p'_{I+1,j})) - \rho_{i,j} A_{i,j} (u_{i,j}^{\circ} + d_{i,j}(p'_{I-1,j} - p'_{I,j}))] \\ &+ [\rho_{I,j+1} A_{I,j+1} (v_{I,j+1}^{\circ} + d_{I,j+1}(p'_{I,j} - p'_{I,j+1})) - \rho_{I,j} A_{I,j} (v_{I,j}^{\circ} + d_{I,j}(p'_{I-1,j} \\ &- p'_{I,j}))] = 0 \end{aligned} \quad (115)$$

Reordenando,

$$\begin{aligned} &[(\rho d A)_{i+1,j} + (\rho d A)_{i,j} + (\rho d A)_{I,j+1} + (\rho d A)_{I,j}] p'_{I,j} = \\ &= (\rho d A)_{i+1,j} p'_{I+1,j} + (\rho d A)_{i,j} p'_{I-1,j} + (\rho d A)_{I,j+1} p'_{I,j+1} + (\rho d A)_{I,j} p'_{I,j-1} \\ &+ [(\rho \dot{u} A)_{i,j} - (\rho \dot{u} A)_{i+1,j} + (\rho \dot{v} A)_{I,j} - (\rho \dot{v} A)_{I,j+1}] \end{aligned} \quad (116)$$

Identificando los coeficientes de  $p'$ :

$$a_{I,j} p'_{I,j} = a_{i+1,j} p'_{I+1,j} + a_{I-1,j} p'_{I-1,j} + a_{I,j} p'_{I,j+1} + a_{I,j-1} p'_{I,j-1} + b'_{I,j} \quad (117)$$

donde  $a_{I,j} = a_{i+1,j} + a_{I-1,j} + a_{I,j} + a_{I,j-1}$  y los coeficientes:

$a_{i+1,j}$	$a_{I-1,j}$	$a_{I,j+1}$	$a_{I,j-1}$	$b'_{I,j}$	
$(\rho d A)_{i+1,j}$	$(\rho d A)_{I-1,j}$	$(\rho d A)_{I,j+1}$	$(\rho d A)_{I,j-1}$	$(\rho u^* A)_{I,j} - (\rho u^* A)_{i+1,j}$ $+ (\rho v^* A)_{I,j} - (\rho v^* A)_{I,j+1}$	(118)

De esta forma, se obtuvo una ecuación para el valor de corrección de presión.

Para evitar la divergencia del método, es necesario agregar un coeficiente  $\alpha$  en las ecuaciones de corrección:

$$\begin{aligned} a_{I,j} p'_{I,j} &= a_{i+1,j} p'_{I+1,j} + a_{I-1,j} p'_{I-1,j} + a_{I,j} p'_{I,j+1} + a_{I,j-1} p'_{I,j-1} + b'_{I,j} \\ u^{new} &= \alpha_u u + (1 - \alpha_u) u^{(n-1)} \\ v^{new} &= \alpha_v v + (1 - \alpha_v) v^{(n-1)} \end{aligned} \quad (119)$$

siendo  $\alpha$  un valor entre 0 y 1. Un valor muy elevado puede provocar oscilaciones o incluso divergencia, mientras que un valor muy bajo resultaría en un proceso muy lento.

A continuación, se resume en forma de diagrama el algoritmo SIMPLE:

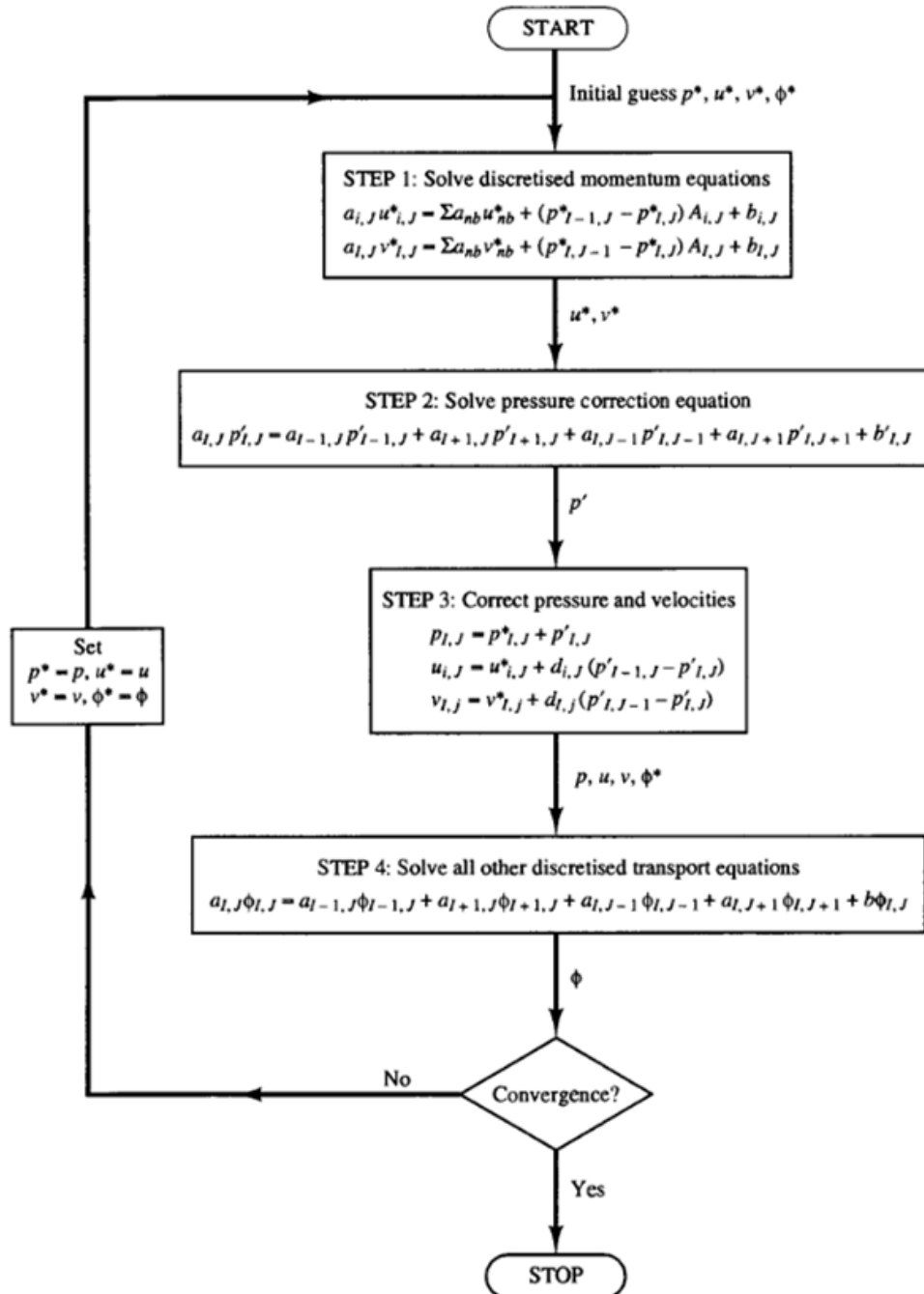


Figura 13: Diagrama del algoritmo SIMPLE. (Computational Fluid Dynamics. H K Versteeg)

### 5.2.4. Volúmenes finitos para flujo difusivo convectivo transitorio.

Se expondrá de forma sintética la discretización para la ecuación general de transporte:

$$\frac{\partial(\rho B)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho B u) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla B) + S_B$$

$$\frac{\partial(\rho B)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u B)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v B)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w B)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial B}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial B}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \Gamma \frac{\partial B}{\partial z} \right) + S$$
 (120)

Se discretiza utilizando el esquema mixto detallado anteriormente:

$$a_p B_p = a_w B_w + a_e B_e + a_s B_s + a_n B_n + a_b B_b + a_t B_t + a_p^0 B_p^0 + S_u$$
 (121)

Donde

$$a_p = a_w + a_e + a_s + a_n + a_b + a_t + a_p^0 + \Delta F - S_p$$

$$a_p^0 = \frac{\rho_p^0 \Delta V}{\Delta t} \bar{S} \Delta V = S_u + S_p B_p$$
 (122)

Tabla III: Discretización de flujo difusivo convectivo transitorio

	Flujo unidimensional	Flujo bidimensional	Flujo tridimensional
$a_w$	$\max \left[ F_w, \left( D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[ F_w, \left( D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[ F_w, \left( D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$
$a_e$	$\max \left[ -F_e, \left( D_e + \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[ -F_e, \left( D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[ -F_e, \left( D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$
$a_s$	-	$\max \left[ F_s, \left( D_s + \frac{F_s}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[ F_s, \left( D_s + \frac{F_s}{2} \right), 0 \right]$
$a_n$	-	$\max \left[ -F_n, \left( D_n - \frac{F_n}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[ -F_n, \left( D_n - \frac{F_n}{2} \right), 0 \right]$
$a_b$	-	-	$\max \left[ F_b, \left( D_b + \frac{F_b}{2} \right), 0 \right]$
$a_t$	-	-	$\max \left[ -F_t, \left( D_t - \frac{F_t}{2} \right), 0 \right]$
$\Delta F$	$F_e - F_w$	$F_e - F_w + F_n - F_s$	$F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b$

Cara	w	e	s	n	b	t
F	$(\rho u)_w A_w$	$(\rho u)_e A_e$	$(\rho u)_s A_s$	$(\rho u)_n A_n$	$(\rho u)_b A_b$	$(\rho u)_t A_t$
D	$\frac{\Gamma_w}{\delta_{xWP}} A_w$	$\frac{\Gamma_e}{\delta_{xPE}} A_e$	$\frac{\Gamma_s}{\delta_{ySP}} A_s$	$\frac{\Gamma_n}{\delta_{yPN}} A_n$	$\frac{\Gamma_b}{\delta_{zBP}} A_b$	$\frac{\Gamma_t}{\delta_{zPT}} A_t$

Fuente: *Computational Fluid Dynamics. H K Versteeg*

### 5.2.4.1. Algoritmo PIMPLE.

Se muestra a continuación el diagrama del algoritmo PIMPLE, el cual es una extensión de SIMPLE con un paso más de corrección.

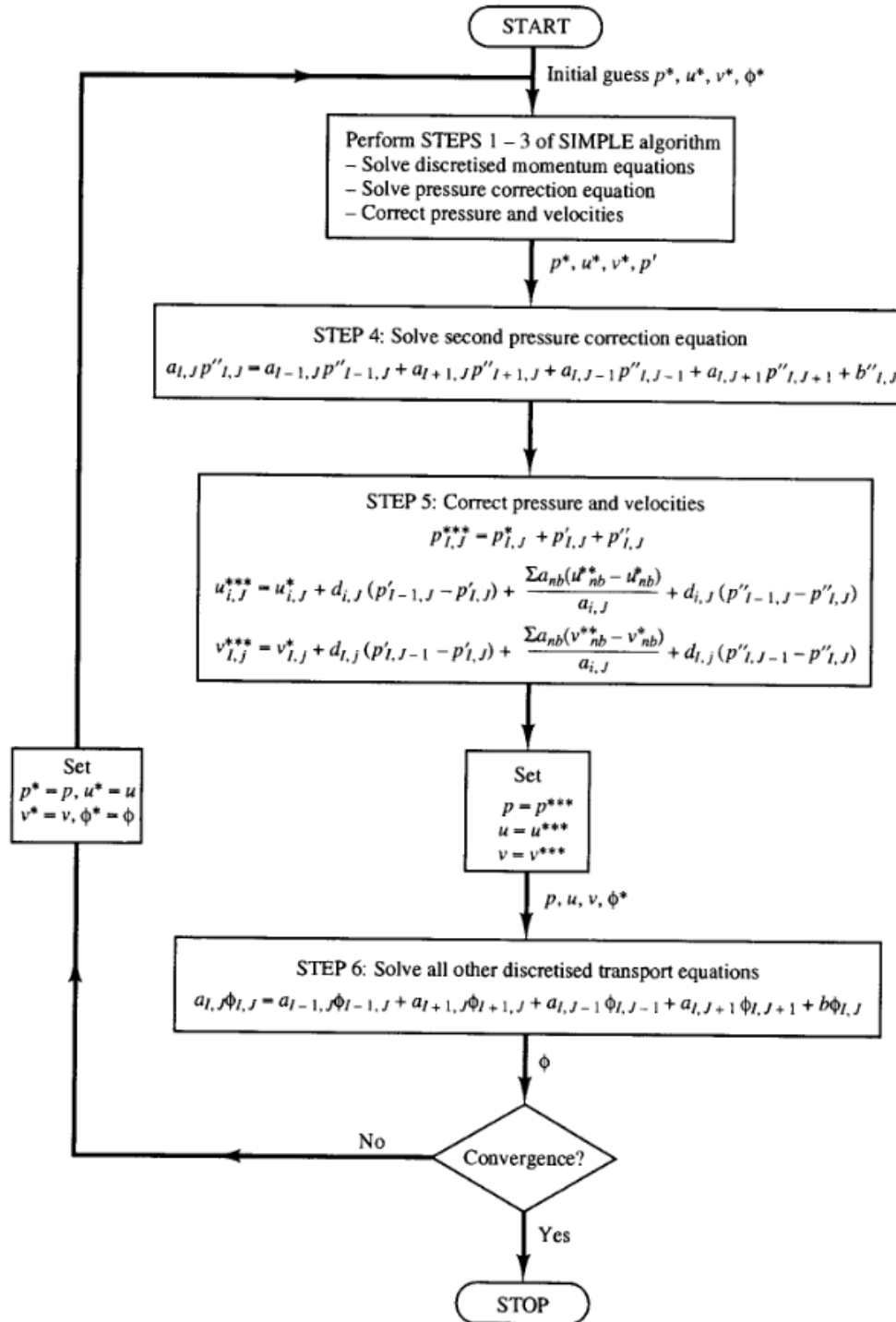


Figura 14: Diagrama del algoritmo PIMPLE. (Computational Fluid Dynamics. H K Versteeg)

## 6. Descripción de casos simplificados

En esta sección se describirán cuatro casos de turbomáquinas simplificadas, los cuales representan los métodos de resolución existentes en OpenFOAM. Como se puede ver en la siguiente tabla, la elección del método depende de dos factores. En primer lugar, es necesario determinar si se quiere obtener una solución estacionaria o transitoria en el tiempo, y segundo, si el dominio estudiado contiene alguna región estacionaria o sólo regiones rotantes.

Tabla IV: Métodos de resolución de turbomáquinas en OpenFOAM

		Dominio computacional	
		Sólo regiones rotantes	Incluye regiones estacionarias
Dependencia del tiempo	Estacionario	SRFSimpleFoam	SimpleFoam + fvOptions (MRFSimpleFoam)
	Transitorio	SRFPimpleFoam	PimpleDyMFoam (AMI)



## 6.1. SRFSimpleFoam

Este caso se denomina SRFSimpleFoam y muestra la simulación de un rotor de forma estacionaria. El algoritmo utilizado es SIMPLE para flujos estacionarios. El dominio completo es rotante y por lo tanto se resuelve el problema utilizando un sistema de referencia no inercial.

### 6.1.1. Descripción geométrica

Se muestra a continuación la geometría del caso descrito (medidas en mm).

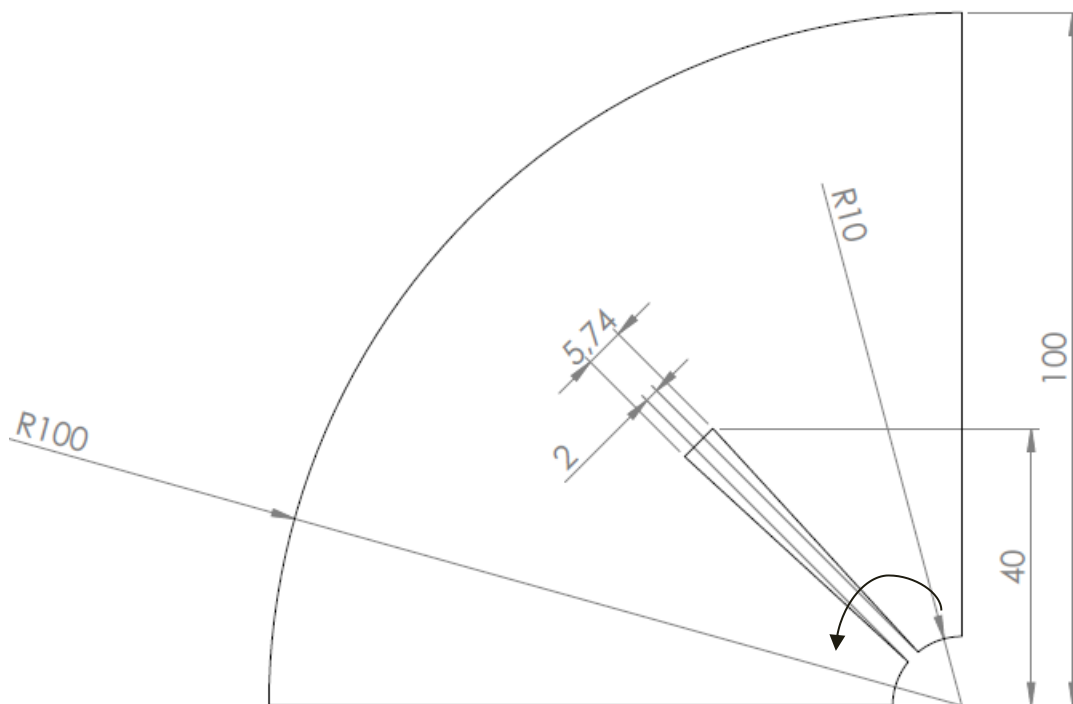


Figura 15: Geometría SRFSimpleFoam

### 6.1.2. Parámetros numéricos

A continuación, se muestra la malla de la turbomáquina, en la cual, el dominio completo utiliza un solo sistema rotante con las siguientes ecuaciones a resolver.

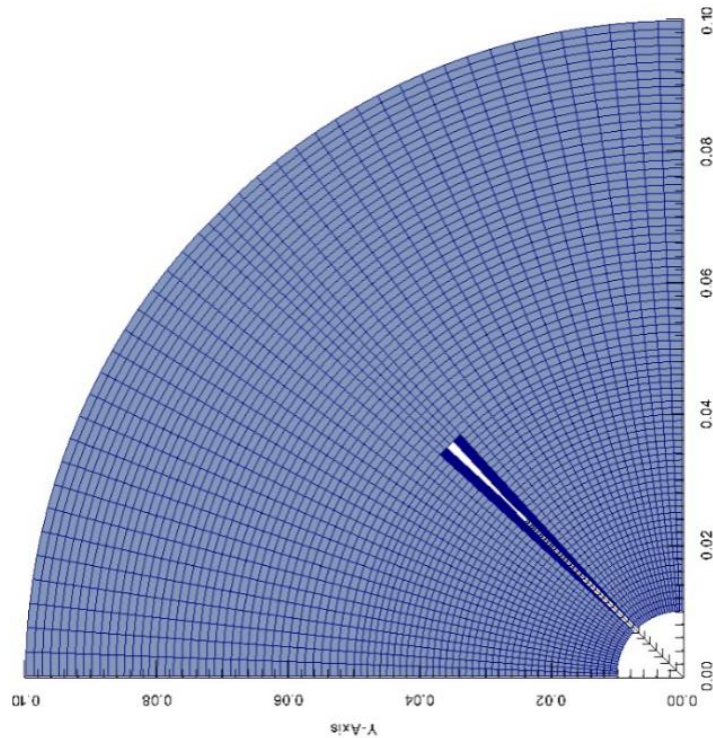


Figura 16: Malla utilizada.

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + \frac{d\Omega}{dt} \times r + \nabla \cdot (V_r \times V_r) + 2\Omega \times V_r + \Omega \times \Omega \times r = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla \cdot \nabla (V_r) \quad (123)$$

$$\nabla \cdot V_r = 0$$

### 6.1.3. Parámetros físicos y condiciones de borde

Viscosidad cinemática:

$$\nu = 1.15^{-5} \frac{m^2}{s} \quad (124)$$

Velocidad angular del rotor en sentido horario:

$$\Omega = 523,6 \frac{rad}{s} \quad (125)$$

La velocidad relativa sobre las paredes del rotor y en la pared de mayor diámetro está definida en 0 m/s

### 6.1.4. Resultados

Se muestran los campos de velocidades absolutas y de presiones, y sus respectivos valores sobre el rotor.

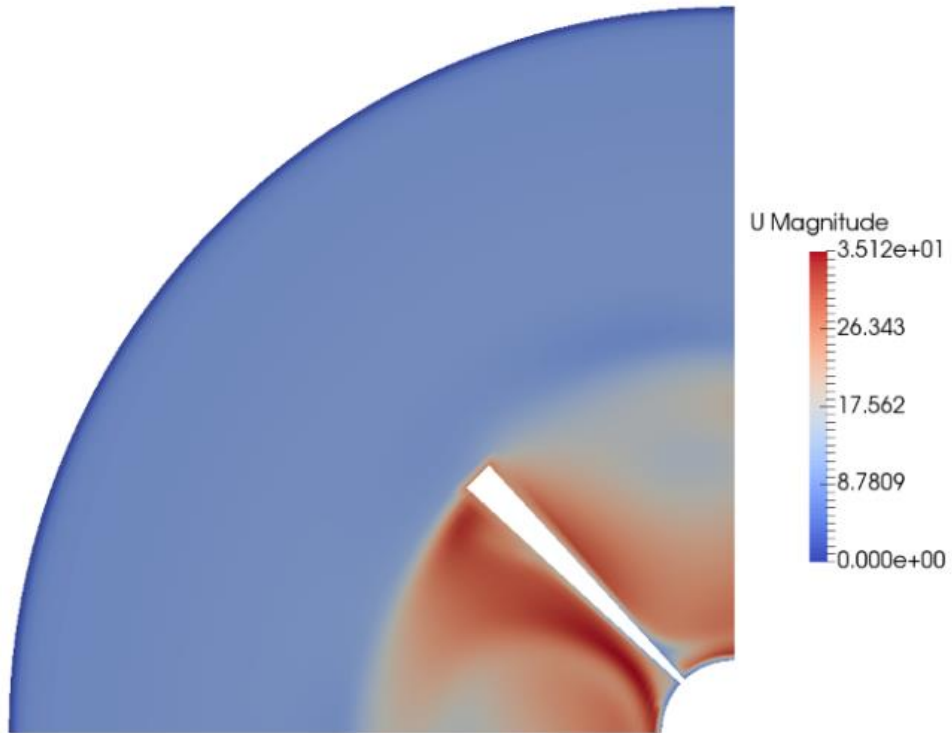


Figura 17: Resultados. Campo de velocidades absolutas [m/s]

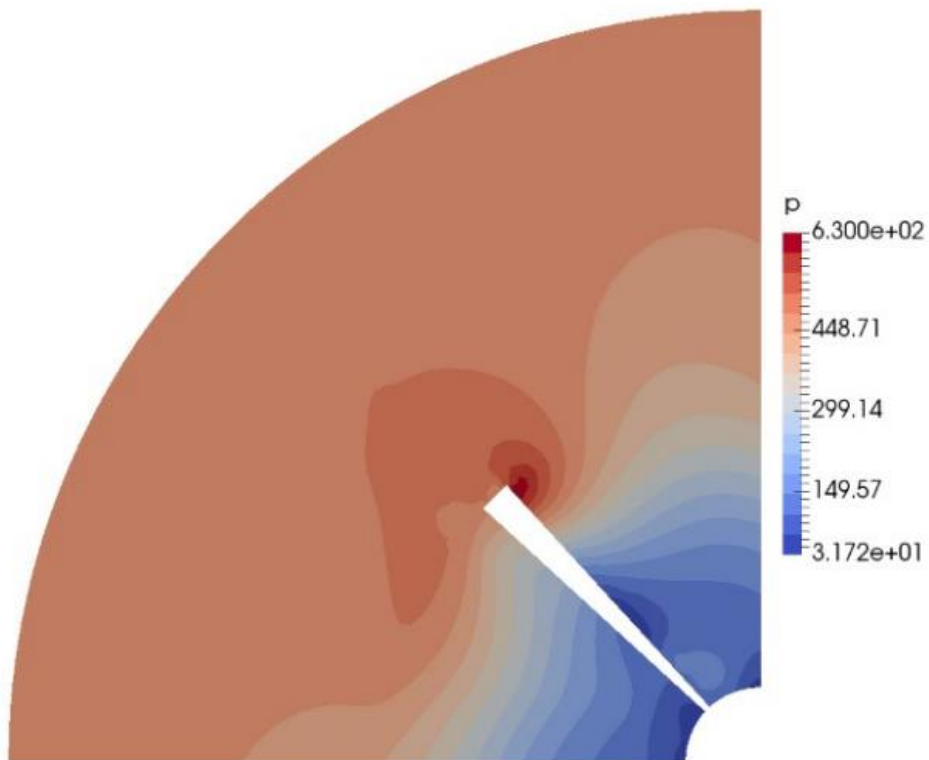


Figura 18: Campo de presiones [m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>]

A continuación, se muestran los valores de presión y velocidad sobre el rotor.

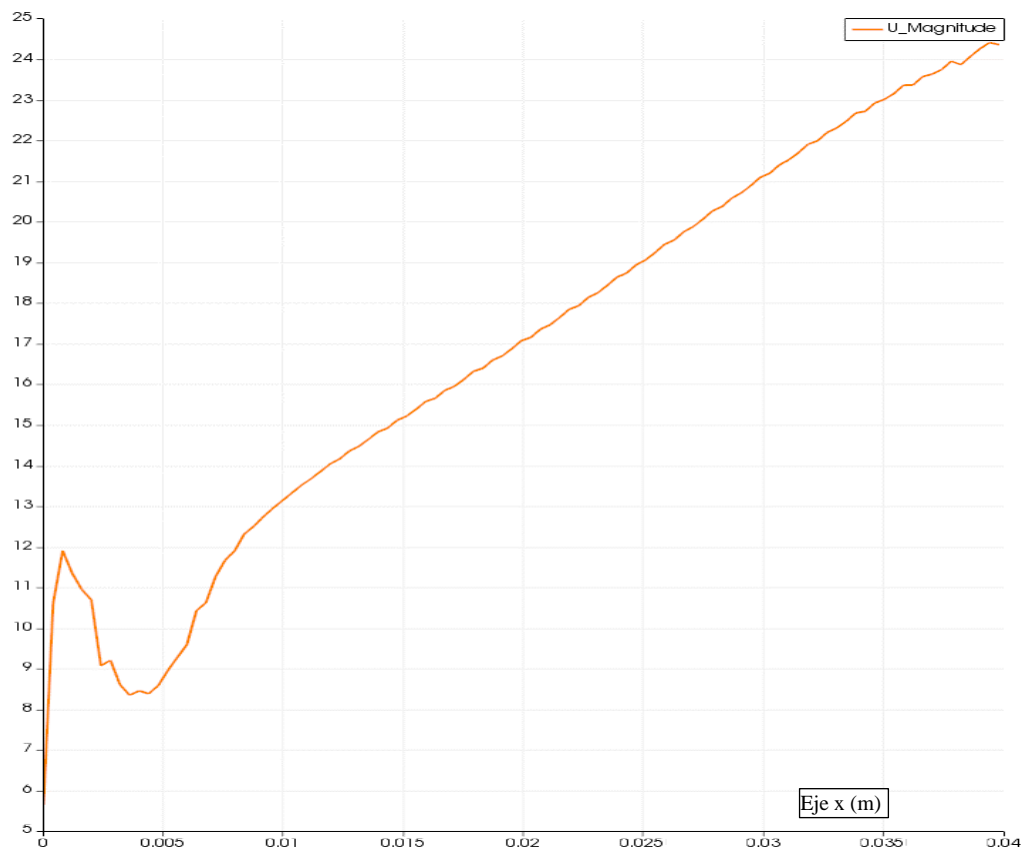
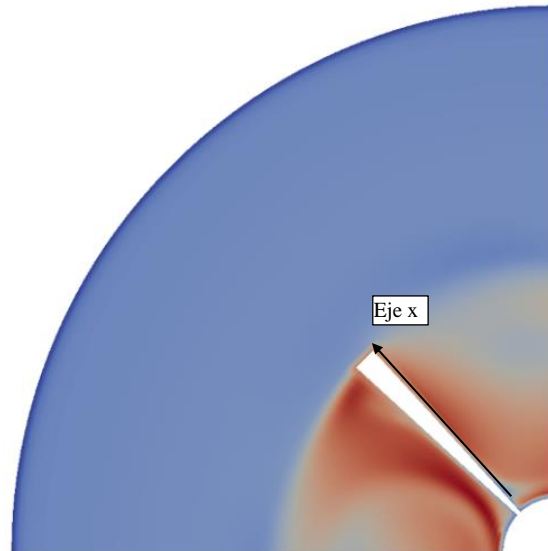


Figura 19 Valores de velocidad sobre el rotor (m/s)

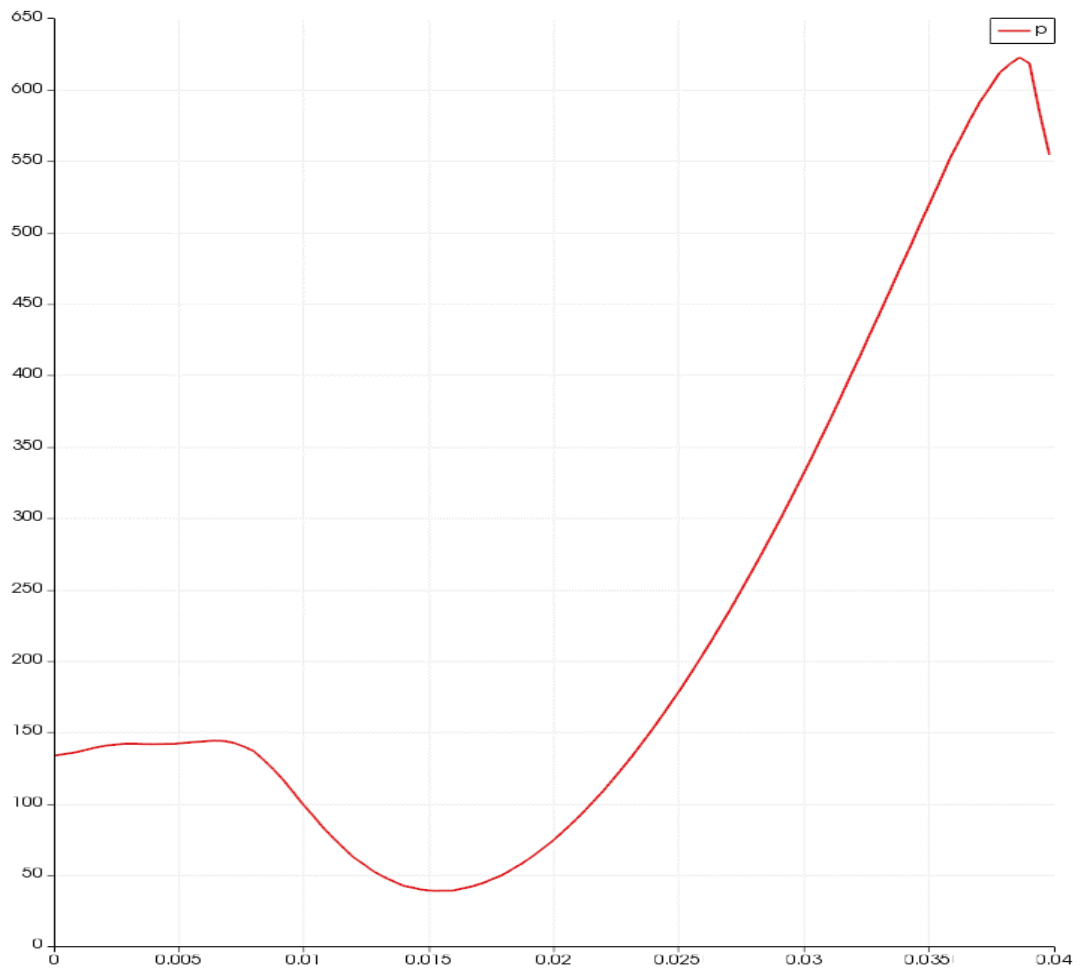
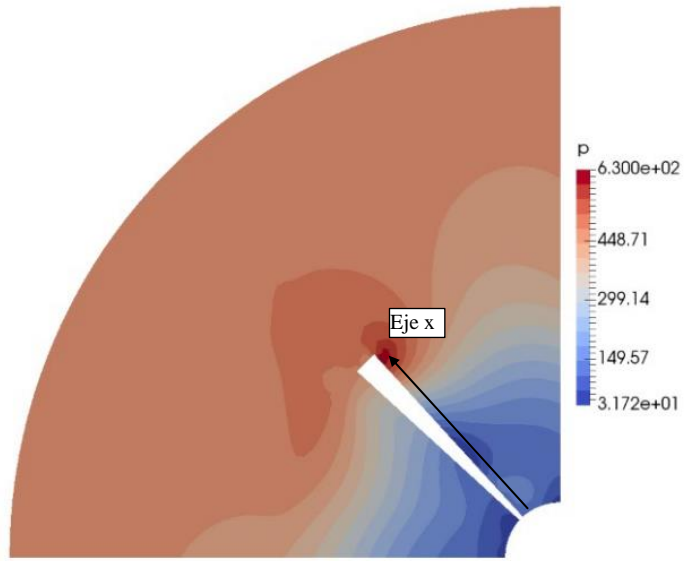


Figura 20 Valores de presión sobre el rotor ( $m^2/s^2$ )

## 6.2. SRFPimpleFoam

Este caso se denomina SRFPimpleFoam y muestra la simulación de un rotor en dos dimensiones de forma no estacionaria. El algoritmo utilizado es PIMPLE para flujos transitorios. El dominio completo es rotante y por lo tanto se resuelve el problema utilizando un sistema de referencia no inercial.

### 6.2.1. Descripción geométrica

La turbomáquina simplificada consiste de un rotor que gira a 60 rpm, como se ve en la siguiente figura (medidas expresadas en mm):

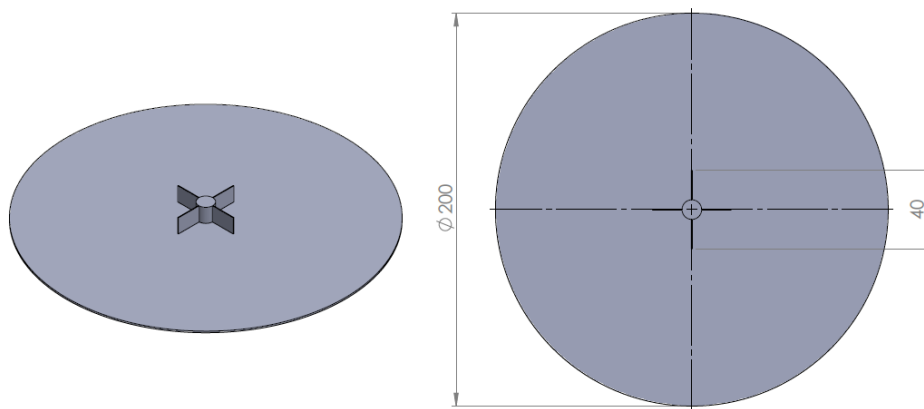


Figura 21: Geometría de la turbomáquina simplificada, SRFPimpleFoam

### 6.2.2. Parámetros numéricos

A continuación, se muestra la malla de la turbomáquina, en la cual, el dominio completo utiliza un solo sistema rotante con las siguientes ecuaciones a resolver.

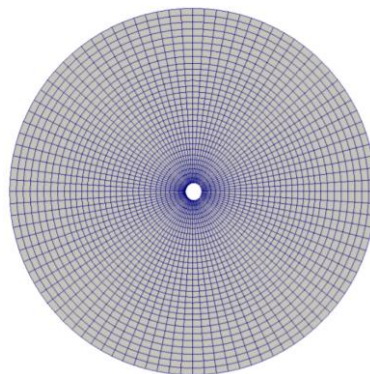


Figura 22: Malla empleada.

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + \frac{d\Omega}{dt} \times r + \nabla \cdot (V_r \times V_r) + 2\Omega \times V_r + \Omega \times \Omega \times r = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla \cdot \nabla (V_r) \quad (126)$$

$$\nabla \cdot V_r = 0$$

### 6.2.3. Parámetros físicos y condiciones de borde

Viscosidad cinemática:

$$\nu = 1.10^{-6} \frac{m^2}{s} \quad (127)$$

Velocidad angular del rotor en sentido horario:

$$\Omega = 6,28 \frac{rad}{s} \quad (128)$$

La velocidad relativa sobre las paredes del rotor está definida en 0 m/s y sin restricciones en la salida (diámetro mayor).

Por otra parte, se define nulo al gradiente de presión en las paredes del rotor y en la salida.

### 6.2.4. Resultados

Se muestra en la figura el campo de presiones para 4 tiempos distintos.

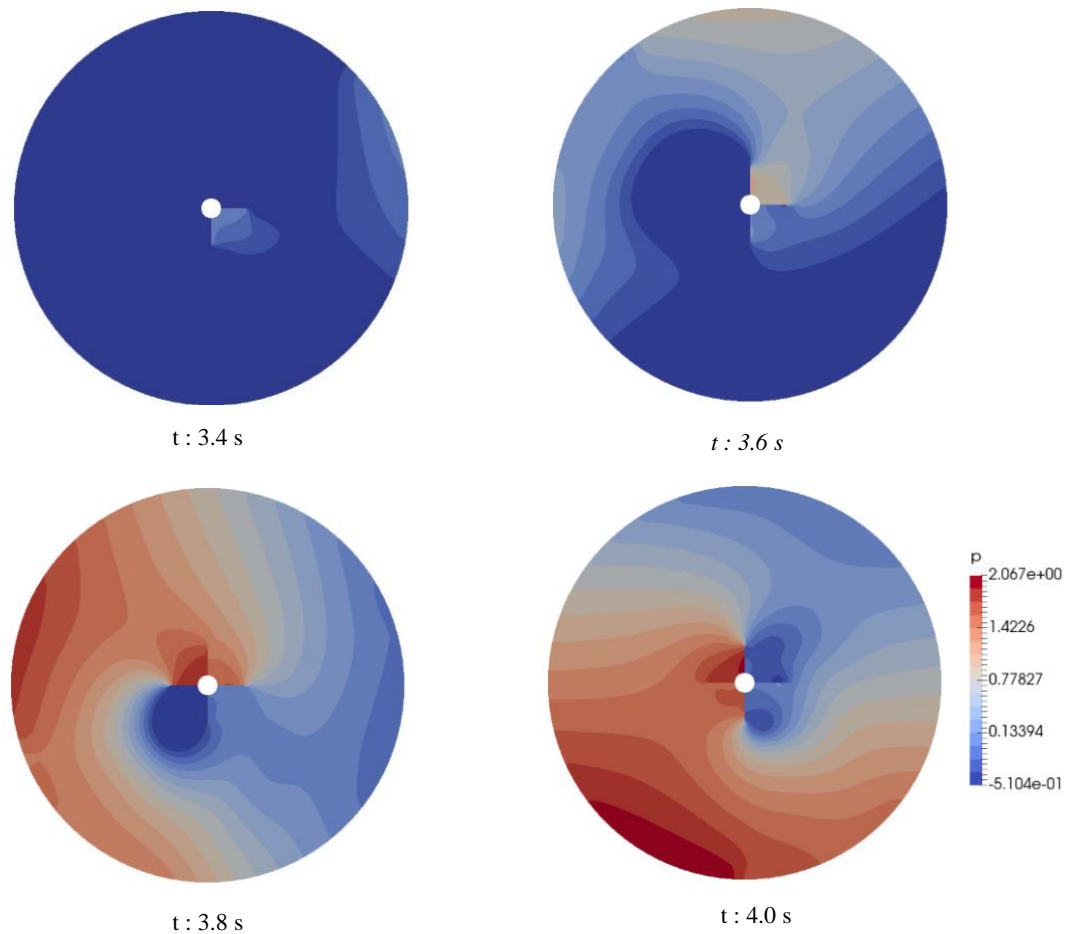


Figura 23: Resultados. Campo de presión para distintos tiempos.

A continuación, el campo de velocidades para 4 tiempos distintos.

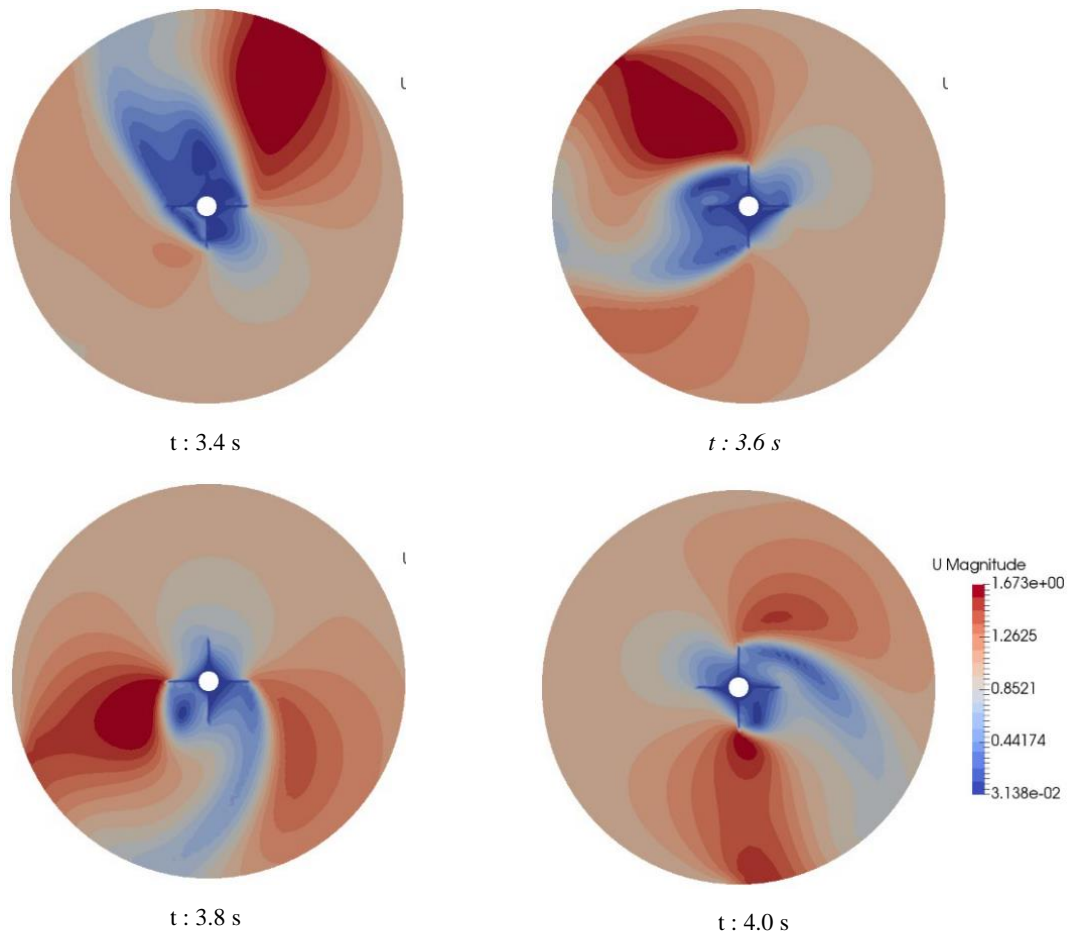


Figura 24: Resultados. Campo de velocidades para distintos tiempos.

Los resultados de esta simulación no reflejan la rotación del rotor. Se realizó la simulación hasta 12 segundos, obteniendo los mismos resultados. Al no ser el solver utilizado para la simulación principal, no se avanza en resolución del caso.



### 6.3. SimpleFoam + fvOptions (MRFSimpleFoam)

Este caso se denomina mixerVessel2D y muestra la simulación en dos dimensiones de una turbomáquina simplificada, utilizando SimpleFoam y fvOptions (MRFSimpleFoam) como método de resolución. La zona rotante se resuelve en un sistema de referencia rotante (sistema de referencia no inercial) y la zona fija en un sistema de referencia estacionario (sistema de referencia inercial)

#### 6.3.1. Descripción geométrica

La turbomáquina consiste en un rotor y estator con las dimensiones indicadas a continuación:

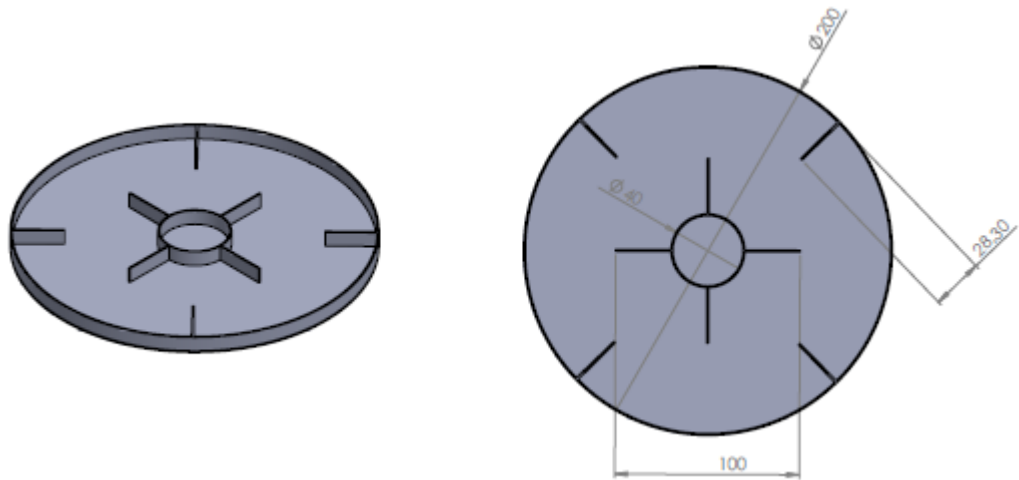


Figura 25. Descripción geométrica.

#### 6.3.2. Parámetros numéricos

A continuación, se muestra la malla del caso estudiado dividida en zonas:

**Rotor.** Zona de color rojo (ver siguiente figura) donde se utiliza un sistema de referencia rotante y las ecuaciones a resolver son:

$$\nabla \cdot (V_r \times V_i) + \Omega \times V_i = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla \cdot \nabla (V_i) \quad (129)$$

$$\nabla \cdot V_i = 0$$

**Estator.** Zona de color gris donde se utiliza un sistema de referencia estático y las ecuaciones son:

$$\nabla \cdot (V_i \times V_i) = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla \cdot \nabla (V_i) \quad (130)$$

$$\nabla \cdot V_i = 0$$

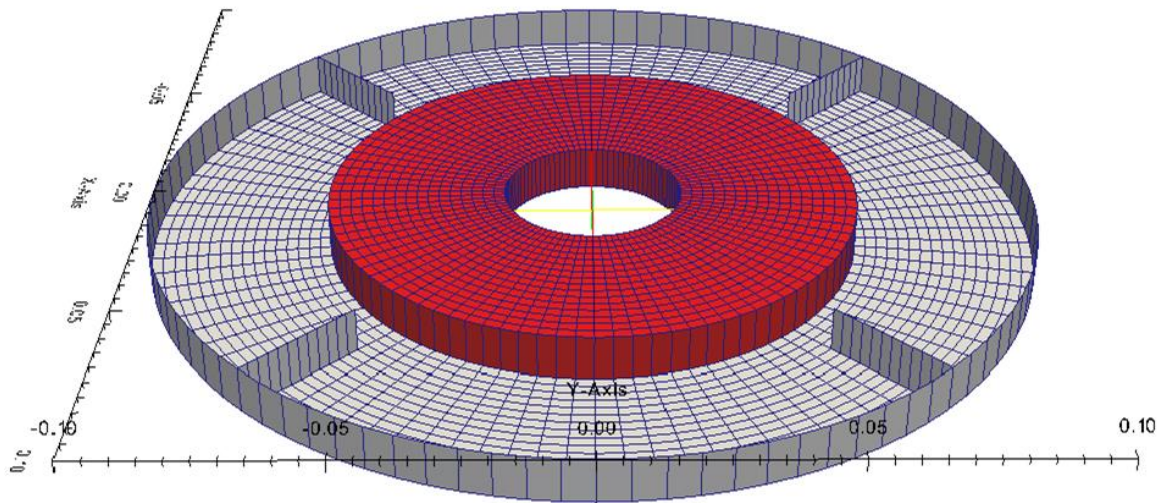


Figura 26. Malla empleada.

La malla del rotor tiene un diámetro de 120 mm. Considerando que las paletas del rotor tienen 100 mm, se encuentran incluidas completamente y además se evita que el extremo de las paletas sea coincidente con la circunferencia de acoplamiento entre mallas.

### 6.3.3. Parámetros físicos y condiciones de borde

Viscosidad cinemática:

$$\nu = 1.10^{-5} \frac{m^2}{s} \quad (131)$$

Velocidad angular del rotor en sentido antihorario:

$$\Omega = 104,72 \frac{rad}{s} \quad (132)$$

Condiciones de borde del campo velocidad:

La velocidad sobre las paredes del rotor y del estator está definida en 0 m/s.

Condiciones de borde del campo presión:

Se define nulo al gradiente de presión en las paredes del rotor y del estator.

### 6.3.4. Resultados

A continuación, se muestran los resultados de la simulación del caso descrito anteriormente. El campo de velocidad mostrado corresponde a la velocidad absoluta en el sistema de referencia inercial  $V_i$ .

En primer lugar, se representa el campo escalar de velocidades, es decir expresa el módulo de la velocidad en cada punto.

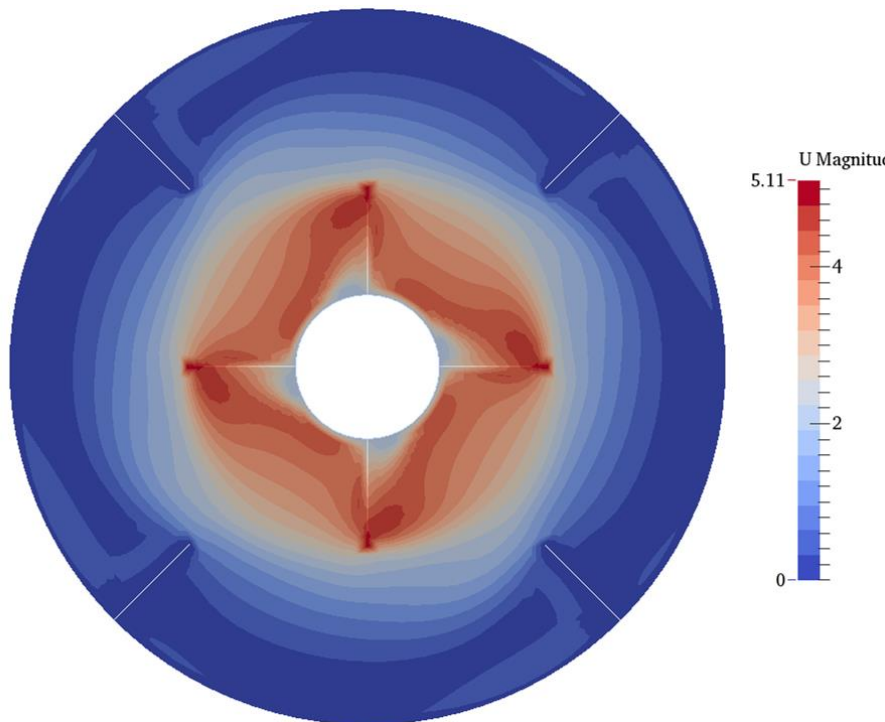


Figura 27: Resultados. Campo de velocidades.

A continuación, se representa el campo de presiones.

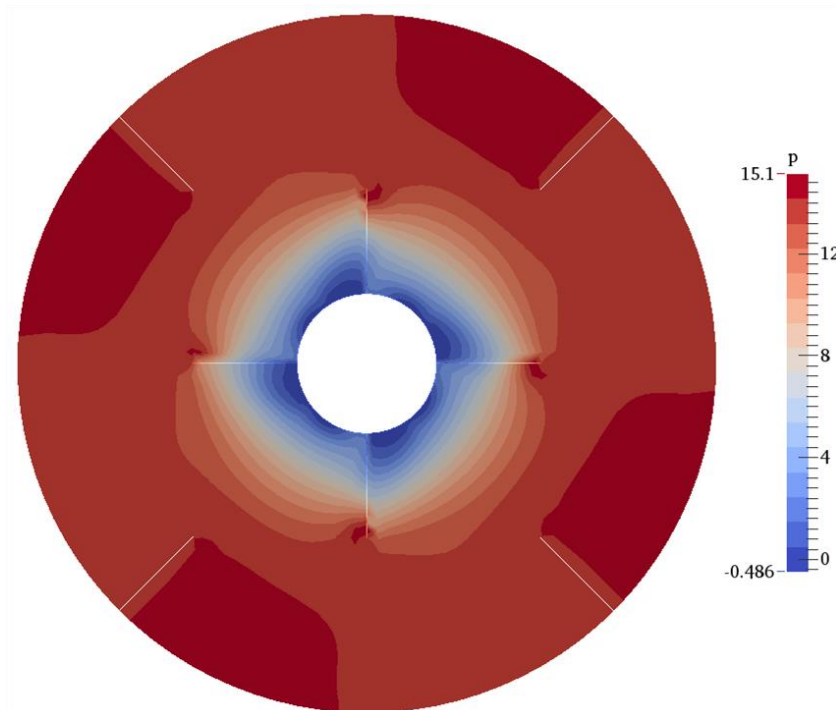


Figura 28: Resultados. Campo de presiones.

## 6.4. PimpleDyMFoam

Este ejemplo se denomina mixerVesselAMI2D y muestra la simulación en dos dimensiones de una turbomáquina igual a la del ejemplo anterior, pero utilizando AMI (Arbitrally Mesh Interface) para la resolución de la solución transitoria. Se utiliza el mismo solver que en la simulación principal de este trabajo.

A diferencia de MRFSimpleFoam, donde las dos mallas se encontraban estáticas y se utilizaban dos sistemas de referencias diferentes, uno fijo y otro rotante, con AMI se utilizan dos mallas de las cuales una está fija y la otra es rotante a la misma velocidad que el rotor.

### 6.4.1. Parámetros numéricos

En este caso, se resuelven las ecuaciones de Navier – Stokes en un solo sistema de referencia inercial.

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \nabla \cdot (V_i \times V_i) = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla \cdot \nabla (V_i) \quad \nabla \cdot V_i = 0 \quad (133)$$

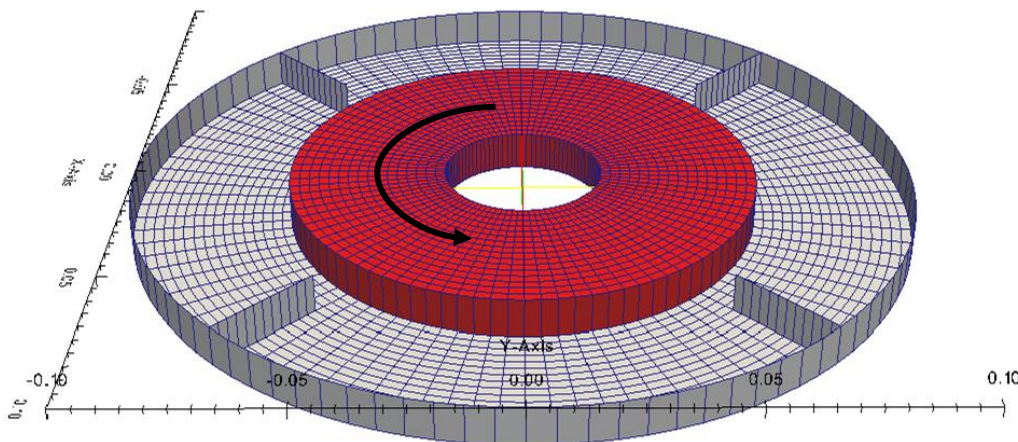


Figura 29. Malla empleada.

La malla roja es rotatoria, mientras que la gris es estacionaria.

### 6.4.2. Parámetros físicos y condiciones de borde

Viscosidad cinemática:

$$\nu = 1.10^{-5} \frac{m^2}{s} \quad (134)$$

Velocidad angular del rotor en sentido anti horario:

$$\Omega = 6.2832 \frac{rad}{s} \quad (135)$$

### 6.4.3. Resultados

Se muestra a continuación el campo de velocidades para distintos tiempos.

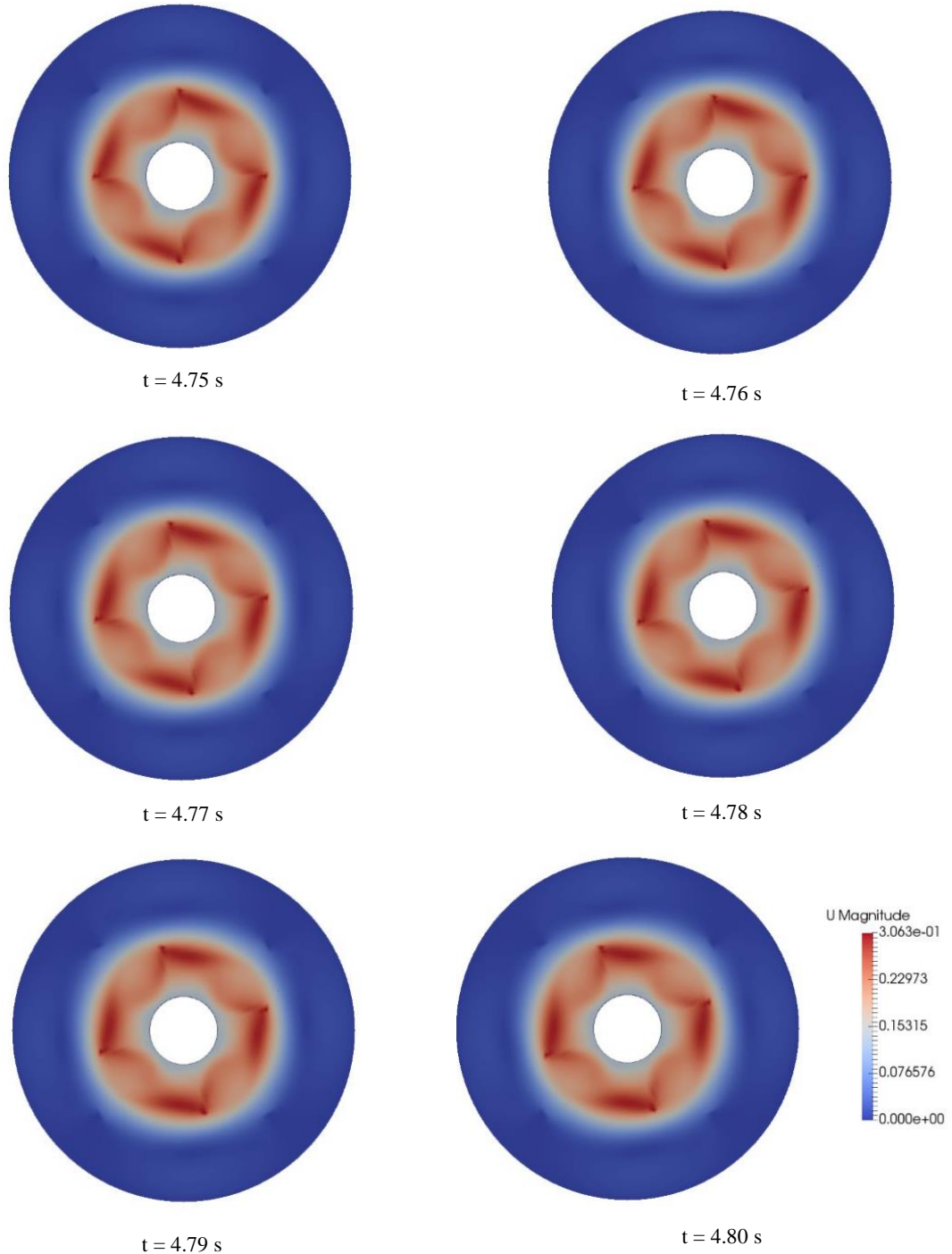


Figura 30. Resultados. Campo de velocidades para distintos tiempos.



La siguiente figura muestra el campo de presiones para distintos tiempos.

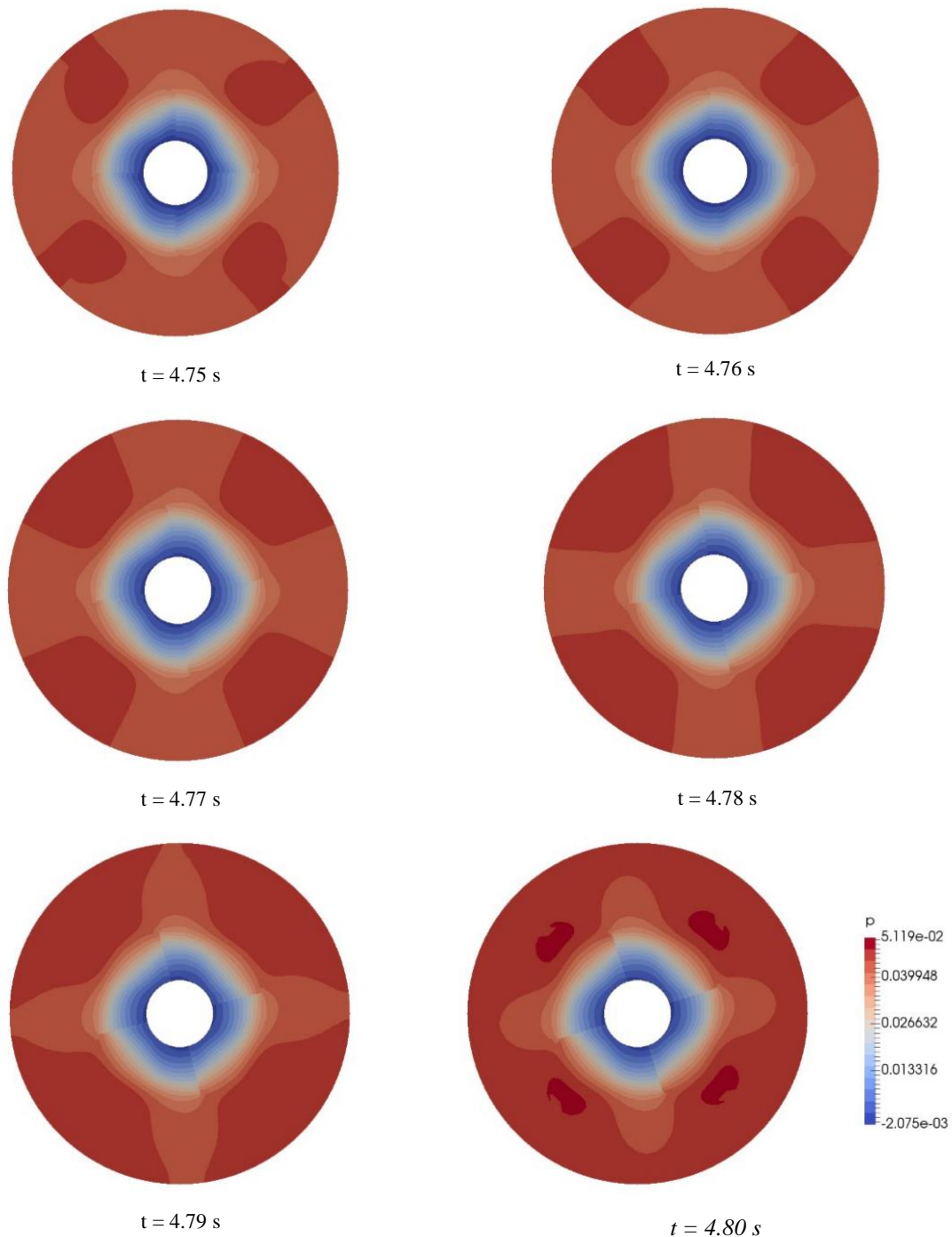


Figura 31. Resultados. Campo de presiones para distintos tiempos.

Se puede observar una zona (rotor) donde el fluido es acelerado por las paletas del rotor, aumentando su velocidad a medida que se acerca al extremo de las paletas, y de baja presión. Una vez es expulsado al estator, la energía cinética que posee se convierte en energía de presión, encontrándose valores máximos de presión cercanos a las paletas del estator.

## 7. Descripción del caso de validación para simulación de turbomáquinas

El caso seleccionado es un modelo simplificado de una bomba centrífuga, descrita en Ubaldi [3]. Esta consiste de un rotor o impulsor con un diámetro de salida de 420 mm y 7 álabes. Además, posee un estator o difusor de 12 álabes. A continuación, se muestra un esquema de la turbomáquina (medidas expresadas en mm):

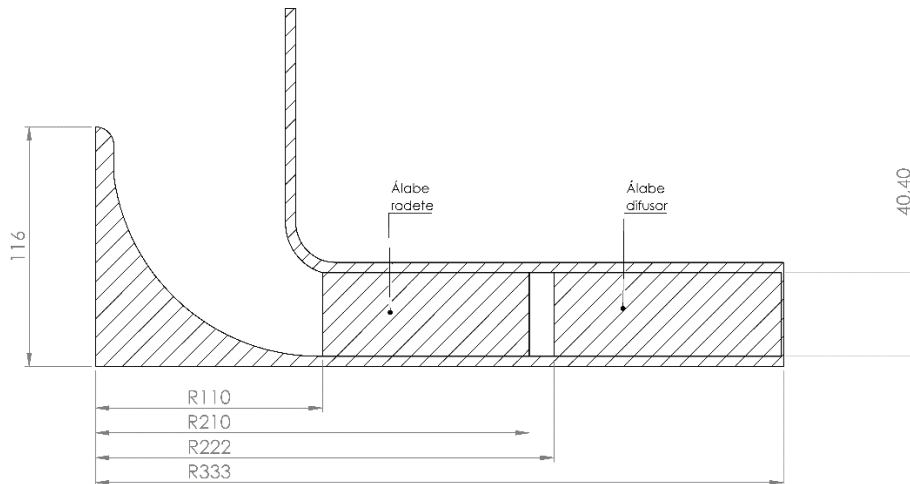


Figura 32 Corte de la vista lateral de la bomba centrífuga.

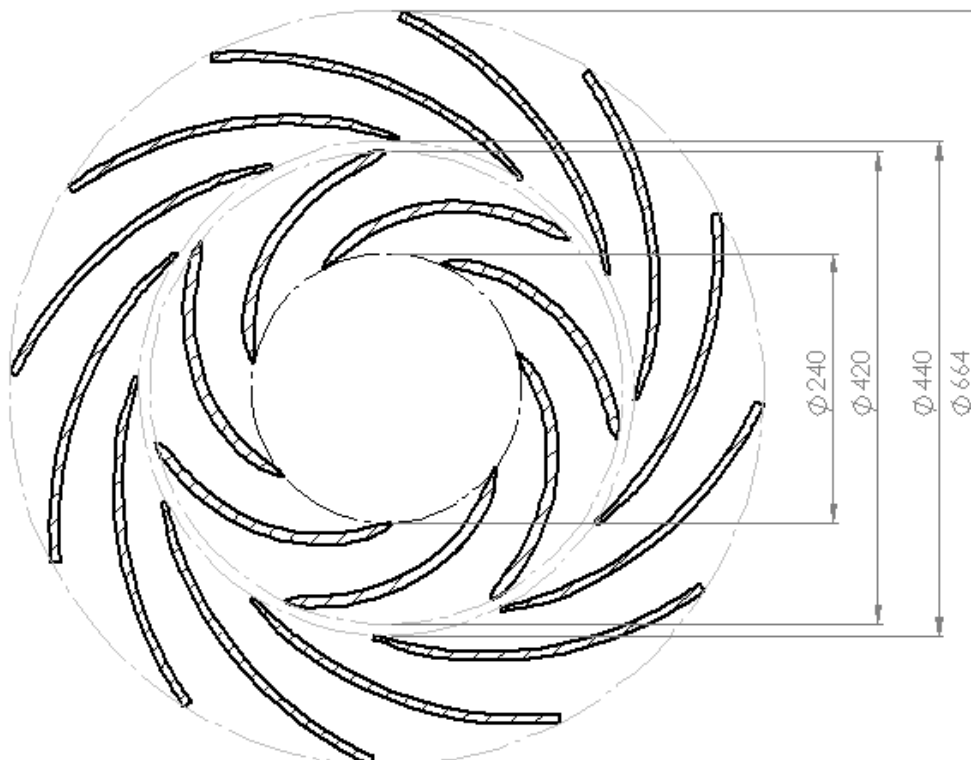


Figura 33 Corte de la vista superior de la bomba centrífuga (sólo los álabes)

El modelo opera en un circuito abierto, donde el aire es aspirado por un tubo con una válvula en su extremo para regular el caudal, y es expulsado directamente a la atmosfera.

De esta manera, se puede regular el caudal para que la bomba opere en su punto nominal de funcionamiento, es decir, el punto de mayor rendimiento

A continuación, se detallan las condiciones de operación nominal de la turbomáquina simplificada:

Tabla V. Condiciones de operación nominal.

Velocidad de rotación	$n = 2000 \text{ rpm} = 209,44 \text{ rad/s}$
Caudal	$Q = 0,2925 \frac{m^3}{s}$
Número de Reynolds	$Re = 6,5 \times 10^5$
Temperatura del aire	$T = 298 \text{ K}$
Densidad del aire	$\rho = 1,2 \frac{kg}{m^3}$
Viscosidad cinemática	$\nu = 1.10^{-5} \frac{m^2}{s}$

FUENTE: Ubaldí, An experimental Investigation of Stator Induced Unsteadiness on Centrifugal Impeller Outflow

El autor presenta los resultados del experimento mediante los valores de 98 puntos distribuidos en una circunferencia ubicada entre el impulsor y el difusor. El arco de circunferencia generado es equivalente a dos veces el arco de circunferencia entre dos álabes del difusor.

Los resultados son presentados en forma promediada para iguales posiciones relativas entre los álabes del impulsor y del difusor.

Debido a que el modelo consiste de un solo sensor, debieron realizar muchas simulaciones para obtener datos en las 98 posiciones.

Además, el sensor está fijo en el espacio, por lo tanto, para poder representar distintas posiciones relativas entre los álabes del rotor y del estator, lo que se desplaza es el estator.

Por este motivo, los datos se muestran en forma adimensional según las siguientes ecuaciones:



$$y_i = wr\bar{t} + r\theta_k + (m - 1) \frac{2\pi k}{z_d} \tag{136}$$

$$G_i = \frac{2\pi r}{z_i}$$

Donde  $y_i$  es la coordenada circunferencial y  $G_i$  es el paso circunferencial de los álabes del rotor.

Suponiendo  $\bar{t} = 0$  y  $m = 1$ , se expresan las posiciones de los puntos medidos de acuerdo a:

$$\frac{y_i}{G_i} = \frac{r\theta_k}{2\pi r} = \frac{z_i\theta_k}{2\pi} = \frac{7\theta_k}{2\pi} \quad [\theta_k] = \text{radianes} \tag{137}$$

$$\frac{y_i}{G_i} = 0,019444\theta_k \quad [\theta_k] = ^\circ$$

De esta forma, las 98 posiciones de la circunferencia ubicada entre el impulsor y el difusor, se adimensionan como se ve en las siguientes imágenes.

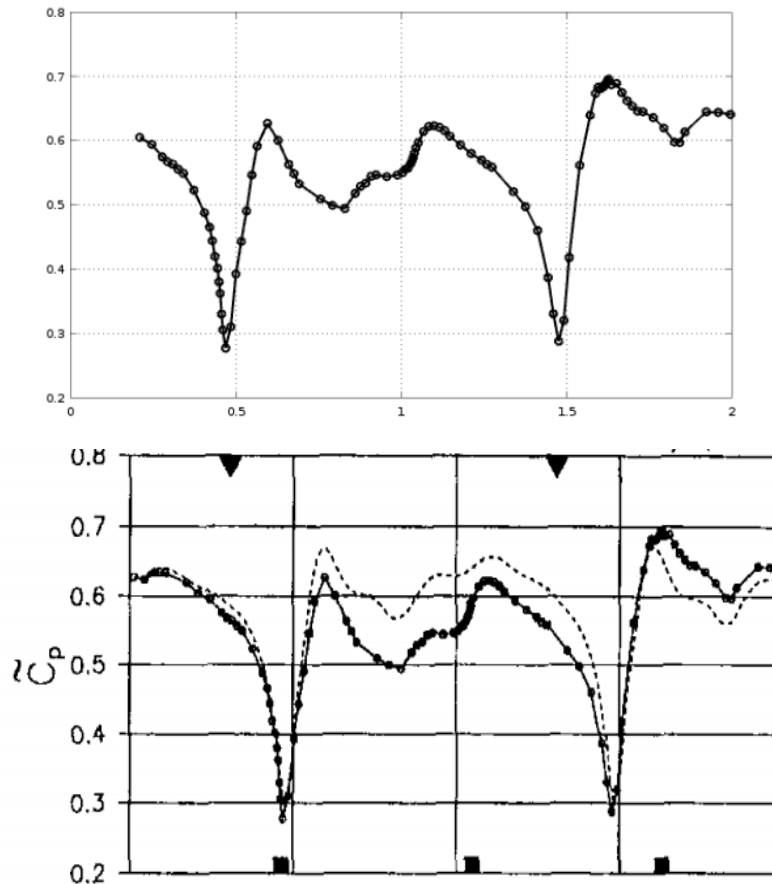


Figura 34. Resultados adimensionados, abajo figura original, arriba información procesada.

En el eje x de las figuras anteriores se muestran las posiciones adimensionadas  $\frac{y_i}{G_i}$ , mientras que en el eje y se grafica el coeficiente de presión  $C_p = \frac{2(p-p_0)}{\rho U_2^2}$ .

La segunda figura corresponde al resultado original presentado por Ubaldi, mientras que la primera es el procesamiento de los datos encontrados en internet.

En conclusión, se buscará realizar la simulación numérica de la bomba centrífuga mostrada, para luego, adimensionar los resultados y por último compararlos entre sí.

## 8. Descripción de la simulación

Luego de haber estudiado los posibles métodos de resolución aplicables a turbomáquinas, se decide emplear el método expuesto en la sección 6.4. Mediante el solver `pimpleDyMFoam` y el uso de AMI se resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes en un sistema de referencia inercial. El dominio del sistema se divide, como ya se explicó anteriormente, en una parte rotante asociada al rotor y otra fija al estator.

De los métodos descritos en el capítulo 6, `pimpleDyMFoam` junto a AMI, es el único que permite obtener una solución transitoria con partes rotantes y fijas, así como lo exige el caso de validación expuesto anteriormente.

### 8.1. Malla

El primer paso para la creación de la malla es la generación de la geometría en 3 dimensiones.

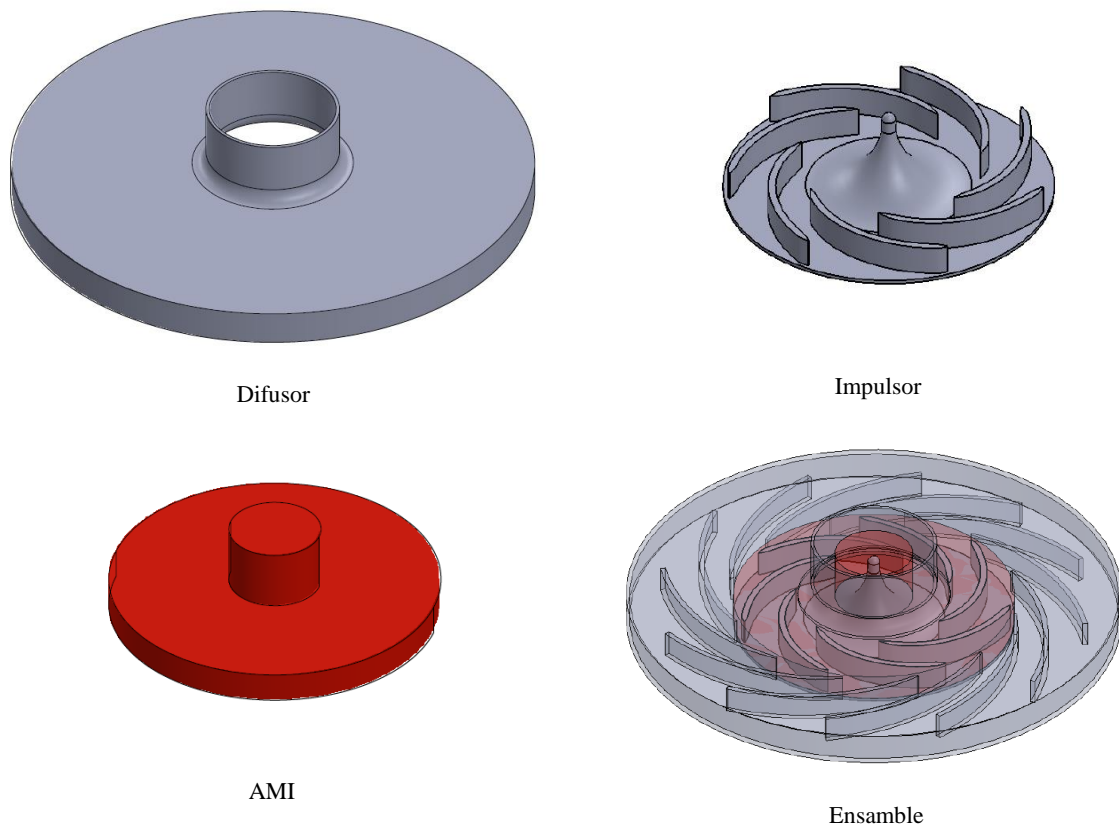


Figura 35 Diseño en 3D de la geometría de la bomba centrífuga

Se observa en la figura anterior la geometría AMI, encargada de generar la división entre la malla estática y la malla rotante.

Una vez obtenida la geometría en tres dimensiones, mediante las aplicaciones de OpenFOAM, blockMesh y snappyHeshMesh se genera la malla.

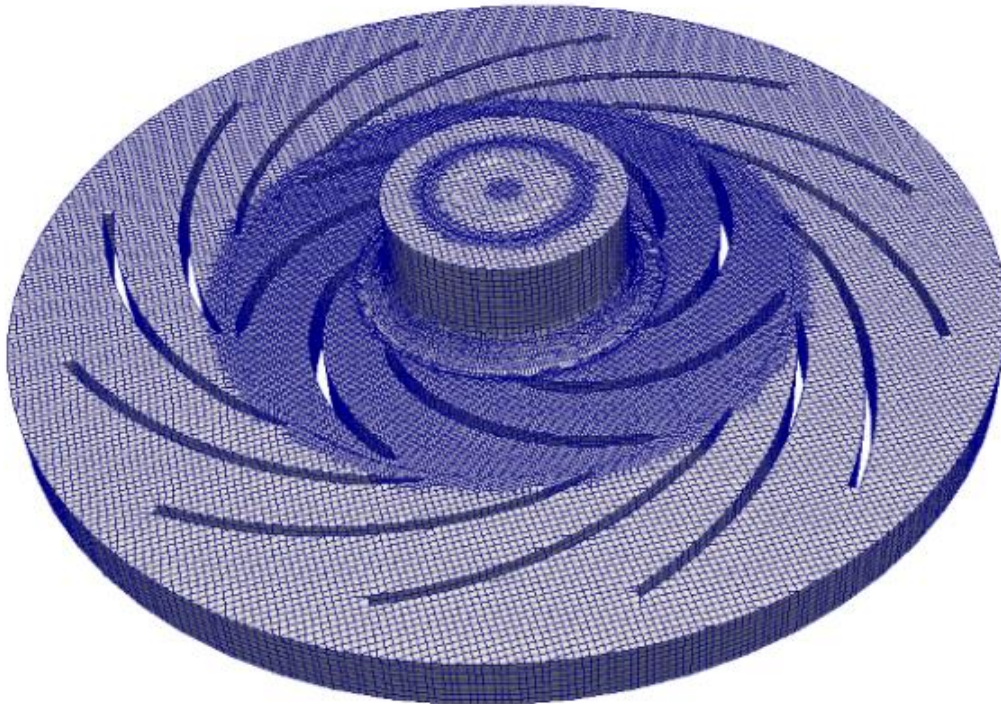


Figura 36 Malla en tres dimensiones

El tiraje (distancia entre los álabes del impulsor y la tapa) de la bomba es de 4 décimas de milímetro. Esto genera que se tenga que trabajar con una malla de elementos muy chicos. El mismo efecto genera la escasa distancia que existe entre los álabes del impulsor y los álabes del difusor.

Cuanto más pequeños sean los elementos de la malla, más cantidad hay en el dominio completo, y, por ende, se requiere de mayor potencia computacional o en su defecto más tiempo de cálculo.

Por este motivo, se decidió no avanzar con el refinamiento y mejora de la malla en tres dimensiones, y pasar a una simulación en dos dimensiones.

Para esto, se realiza un corte de la malla en tres dimensiones y se realiza una extrusión de un elemento de largo.

Se muestra a continuación la primera malla obtenida en dos dimensiones, la cual fue posteriormente refinada en las zonas donde se requiere más detalle.



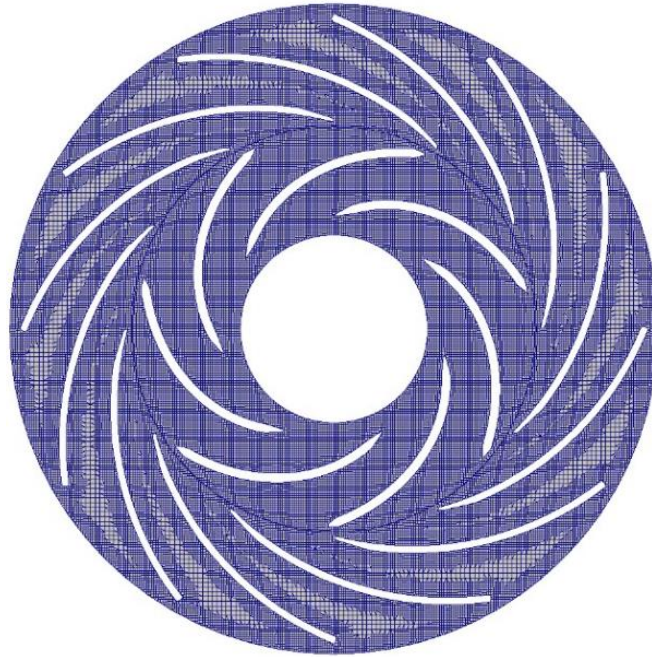


Figura 37 Primera malla en dos dimensiones

Luego de refinar la malla cuidando de mantener tiempos de cálculo adecuados para el presente trabajo se llegó a la siguiente malla:

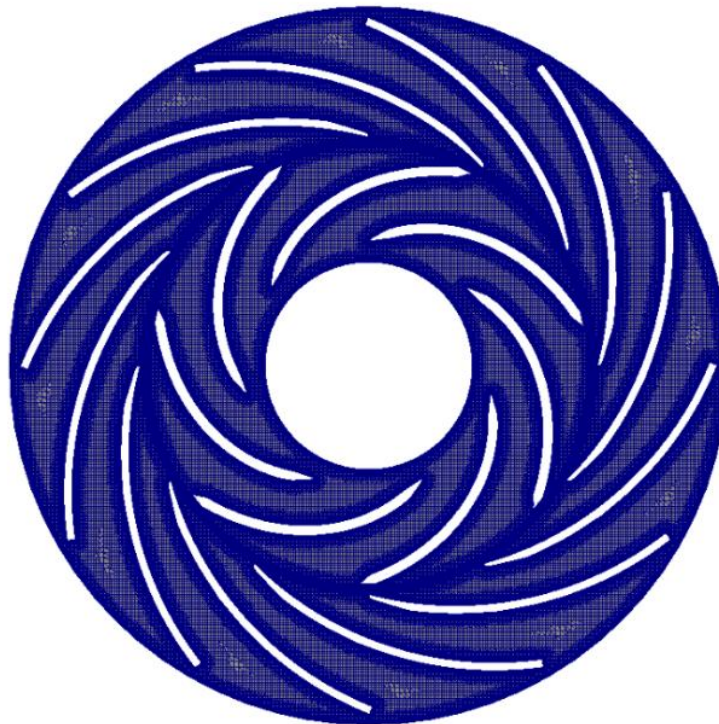


Figura 38: Malla definitiva en dos dimensiones.

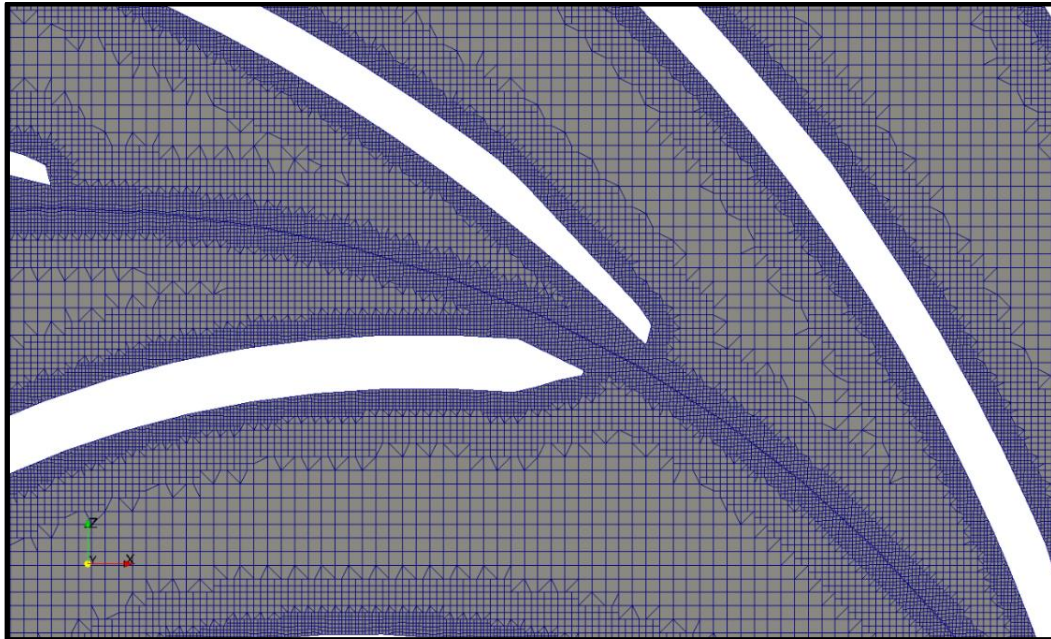


Figura 39 Malla en detalle. Muestra el refinamiento en las zonas de interés.

## 8.2. Condiciones de borde e iniciales

Para representar de la mejor manera, en dos dimensiones, las condiciones reales de operación de la bomba centrífuga del experimento, se utilizaron las siguientes condiciones de borde:

Tabla VI Condiciones de borde de la simulación

Presión en la entrada del impulsor	Presión total	$p_0 = p + \frac{1}{2} U^2 $
Presión en la salida del difusor	Presión estática atmosférica	$p = 0$
Velocidad en la entrada del impulsor	Impuesta por la condición de borde de la presión	-
Velocidad en la salida del difusor	Gradiente nulo	$\nabla \cdot U = 0$
Velocidad en las paredes del estator	Velocidad absoluta nula	$U = 0$
Velocidad en las paredes del rotor	Velocidad relativa nula	$U_r = 0$

De los datos obtenidos de la bibliografía [3] se conoce que el caudal requerido para que la bomba funcione de manera óptima es  $Q = 0,2925 \frac{m^3}{s}$ .

Sin embargo, debido a las condiciones de borde seleccionadas, no es posible imponer el caudal de entrada, o en su defecto, la velocidad del fluido en la entrada del impulsor. Por este motivo, se realizaron varias simulaciones con distintos valores de presión total en la entrada  $p_0$  hasta llegar al caudal buscado.

Se detallan las simulaciones realizadas con sus respectivas presiones totales en la entrada, y su resultante caudal. Se muestran en el orden en que se realizaron:

Tabla VII. Resumen de las simulaciones realizadas en busca del punto óptimo

$p_0 \left[ \frac{m^2}{s^2} \right]$	$Q \left[ \frac{m^3}{s} \right]$
0	0,46
-200	0,42
-1000	-0,05
-600	0,34
-800	0,25

Con los datos obtenidos, se realiza interpolación lineal, y se determina que el caudal buscado se encuentra en un valor de presión total:

$$p_0 = p + \frac{1}{2}|U^2| = -715 \frac{m^2}{s^2}$$

De esta forma, se determina punto óptimo de funcionamiento de la bomba.

Tabla VIII. Punto de operación nominal

Presión total en la entrada	$p_0 = -715 \frac{m^2}{s^2}$
Caudal	$Q = 0,29 \frac{m^3}{s}$
Velocidad de rotación	$n = 2000 \text{ rpm}$

Si se grafican los valores de la *Tabla VII* se obtiene la curva de la bomba estudiada:

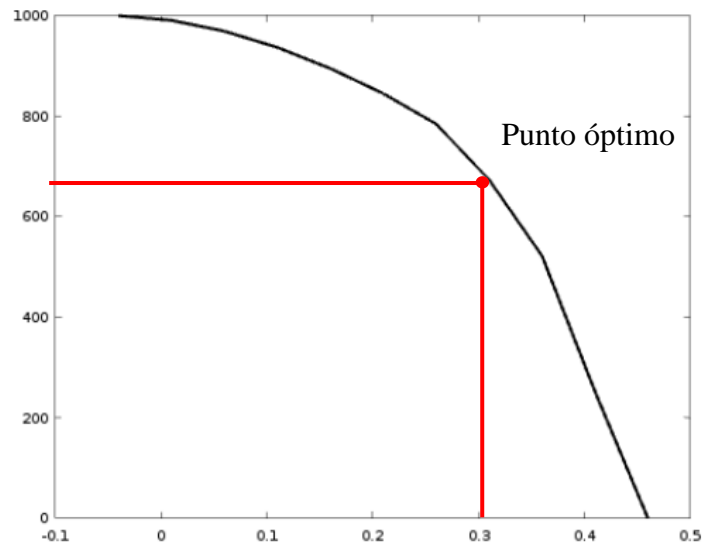


Figura 40 Curva de la bomba centrífuga

A continuación, se muestran los resultados de las simulaciones realizadas con presión total nula en la entrada del impulsor, es decir muy alejado del punto óptimo de operación. Las presiones están expresadas en  $\frac{m^2}{s^2}$ , mientras que las velocidades en  $\frac{m}{s}$ .

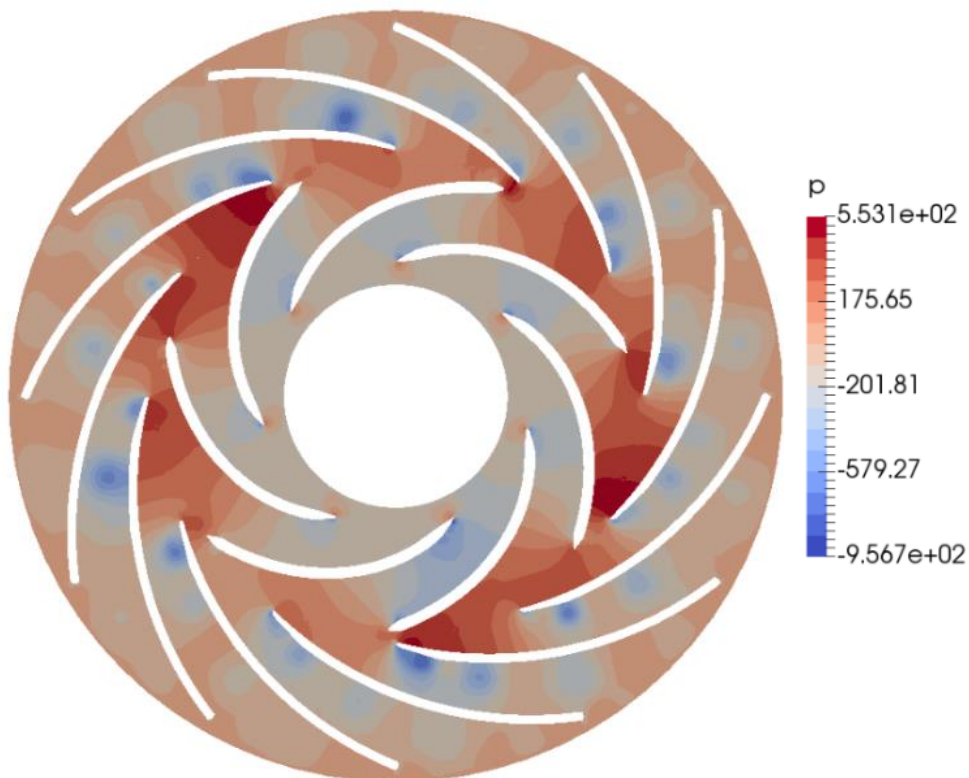


Figura 41 Campo de presiones para  $p_0 = 0$ .



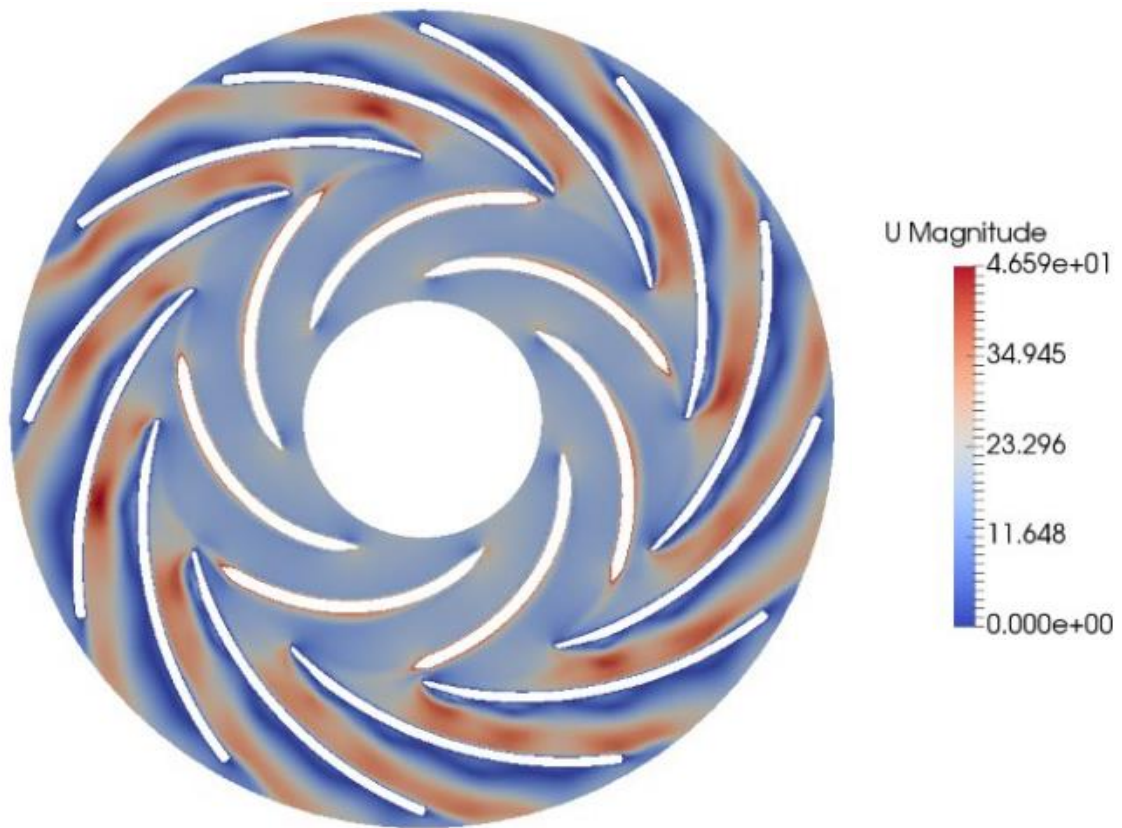


Figura 42 Campo de velocidades para  $p_0 = 0$ .

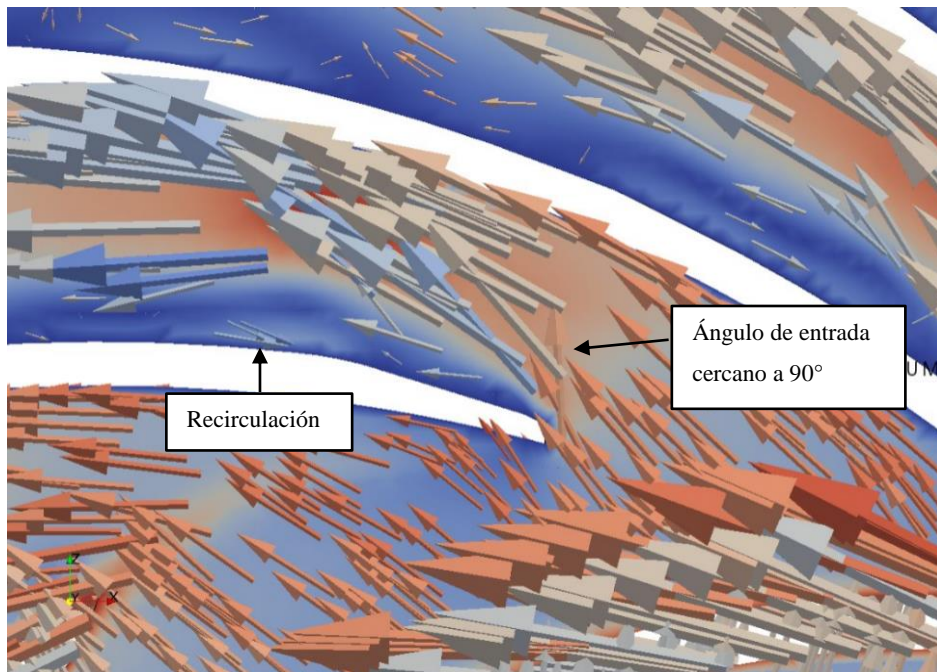


Figura 43 Vectores del campo de velocidades. Recirculaciones y ángulos de entrada al álabe del estator muestran la ineficiencia de la bomba.

### 8.3. Resultados

Una vez obtenido el punto de funcionamiento nominal, se procede a realizar la simulación en dos dimensiones de la bomba centrífuga.

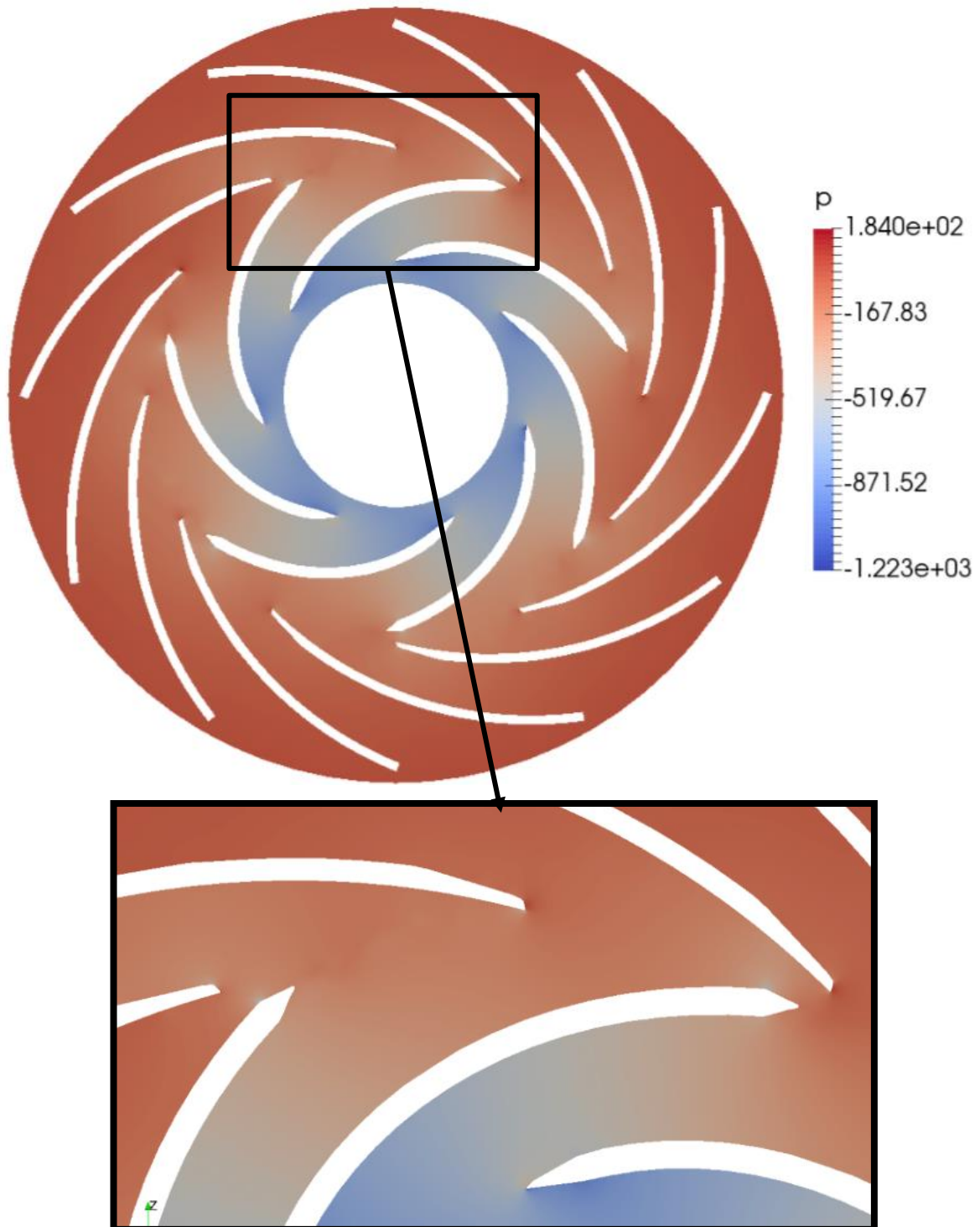


Figura 44. Resultados. Campo de presiones.

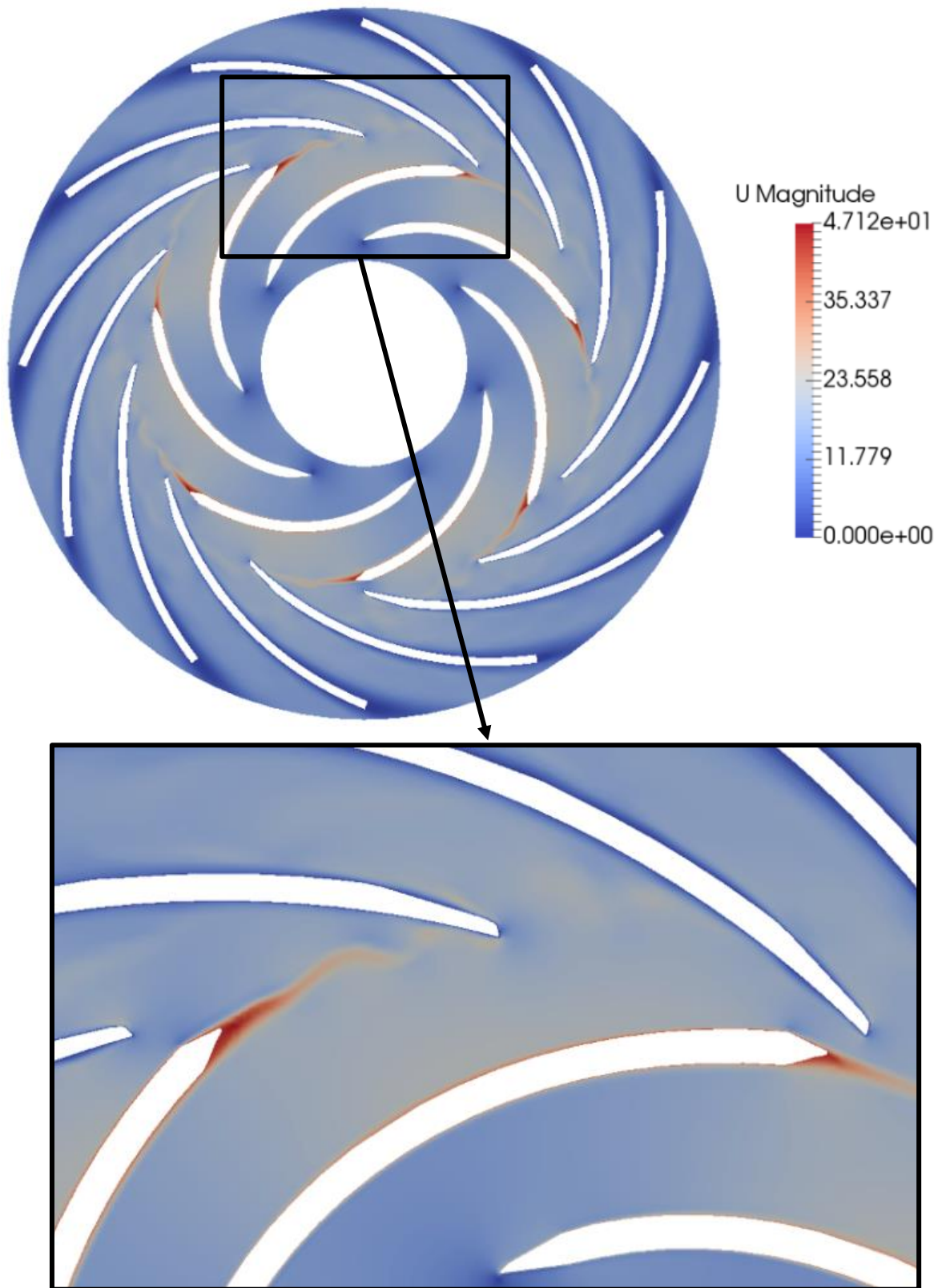


Figura 45. Resultados. Campo de velocidades.



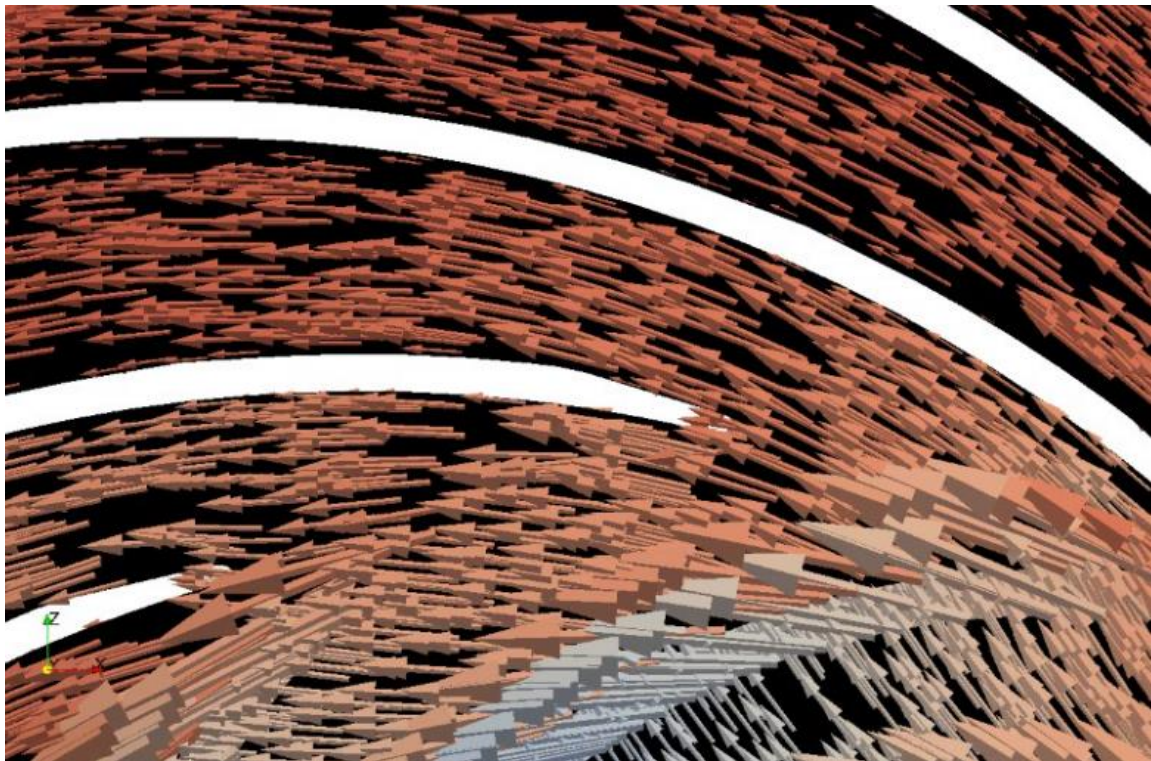
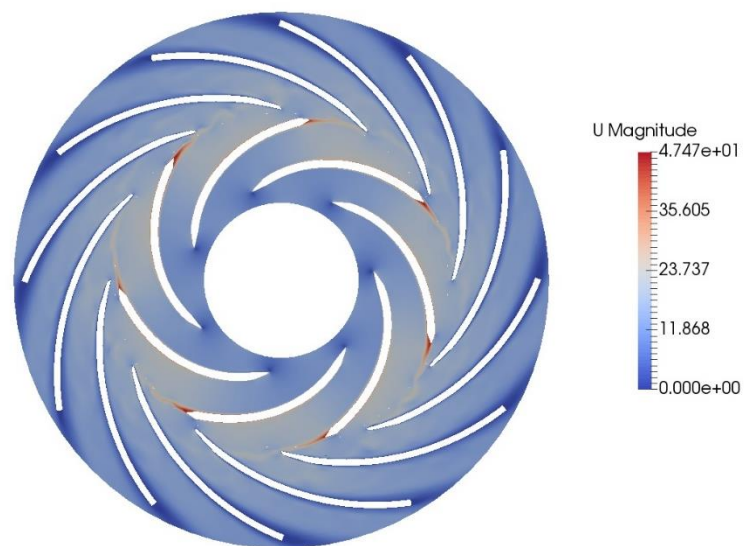


Figura 46

Los resultados de las simulaciones muestran un comportamiento adecuado para una bomba centrífuga. No se observan recirculaciones y el ángulo de entrada del fluido al estator es similar al ángulo de los álabes del mismo.

A continuación, se muestra una secuencia de tiempos consecutivos para poder observar el movimiento del rotor.



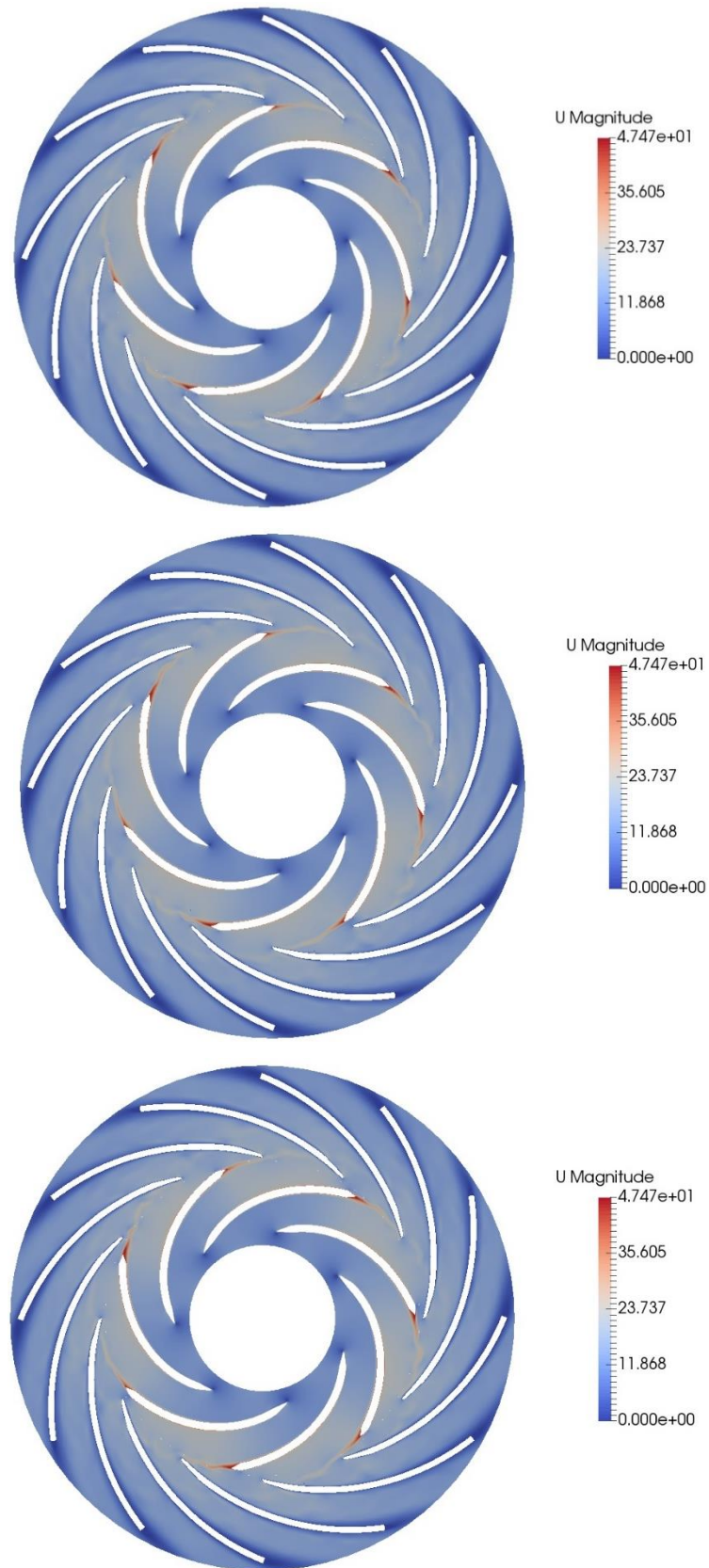


Figura 47. Resultados. Campo de presiones en distintos tiempos.

### 8.4. Comparación de resultados

En esta sección se expondrán los resultados obtenidos en la simulación de la sección anterior en forma adimensionada. Así, se podrán comparar los resultados obtenidos con los expuestos por Ubaldi.

La siguiente figura muestra valores simulados (azul o puntos) y experimentales (rojo o cruces) del coeficiente de presión  $C_p$  en las 98 posiciones mencionadas anteriormente, para el instante en que los álabes del difusor y del rodete se encuentran en las posiciones mostradas en la parte superior (cuadrados) e inferior (triángulos), respectivamente.

Cabe recalcar que los resultados no corresponden a un instante de tiempo. Sino que es el promedio de distintos tiempos en que la posición relativa de los álabes del rotor y el estator es la misma.

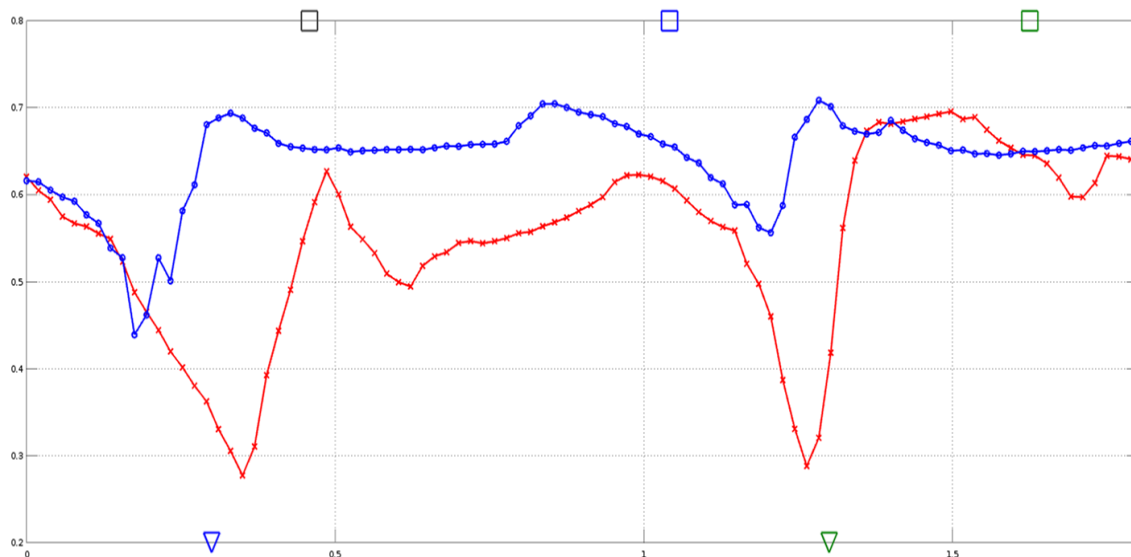


Figura 48: Comparación de resultados experimentales y simulados.



## 9. Conclusiones

Los resultados obtenidos de la simulación son cualitativamente correctos. Estos muestran un comportamiento adecuado para una bomba centrífuga. En esta, la energía mecánica

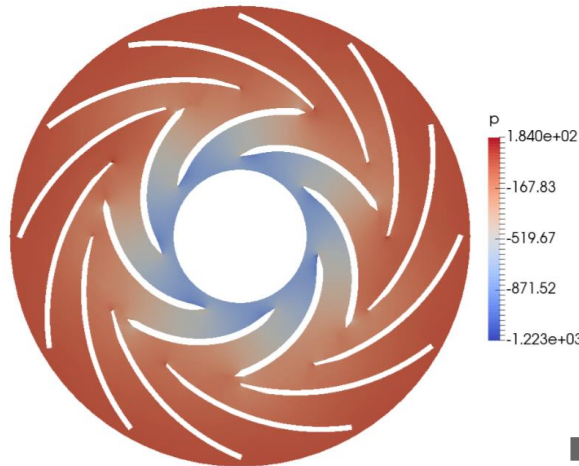


Figura 42. Resultados. Campo de presiones

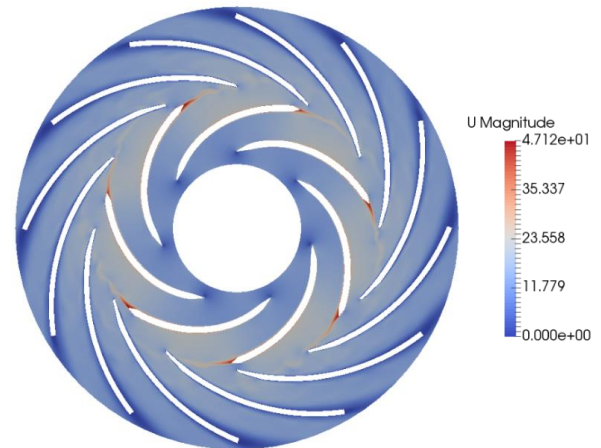


Figura 49. Resultados. Campo de velocidades

del rotor es transferida al fluido en energía cinética y luego convirtiéndose en energía de presión en el estator.

Como se mostró en secciones anteriores, luego de encontrar el punto óptimo de funcionamiento de la bomba, el ángulo de entrada del fluido al estator es casi nulo y no hay recirculaciones que produzcan pérdidas de energía.

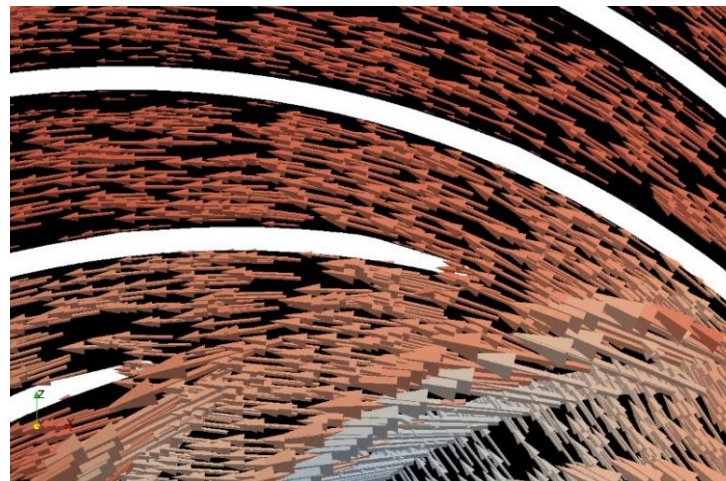


Figura 44

Por otro lado, se encontraron diferencias cuantitativas con respecto a la bibliografía de referencia. En principio, estas discrepancias pueden deberse a la simulación realizada en dos dimensiones.

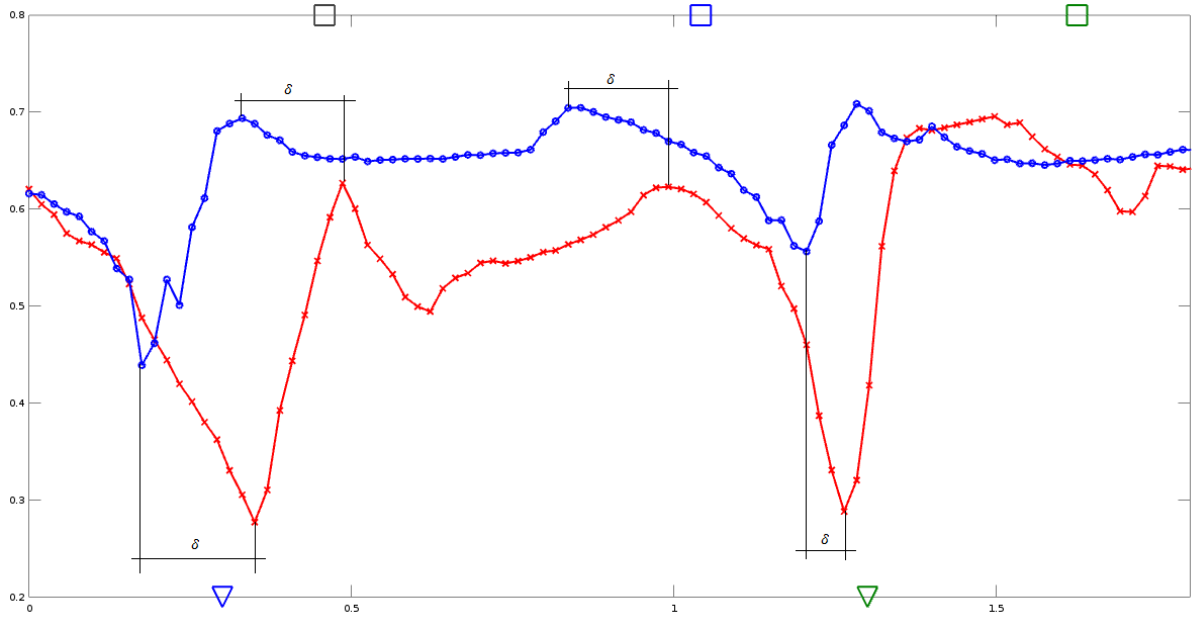
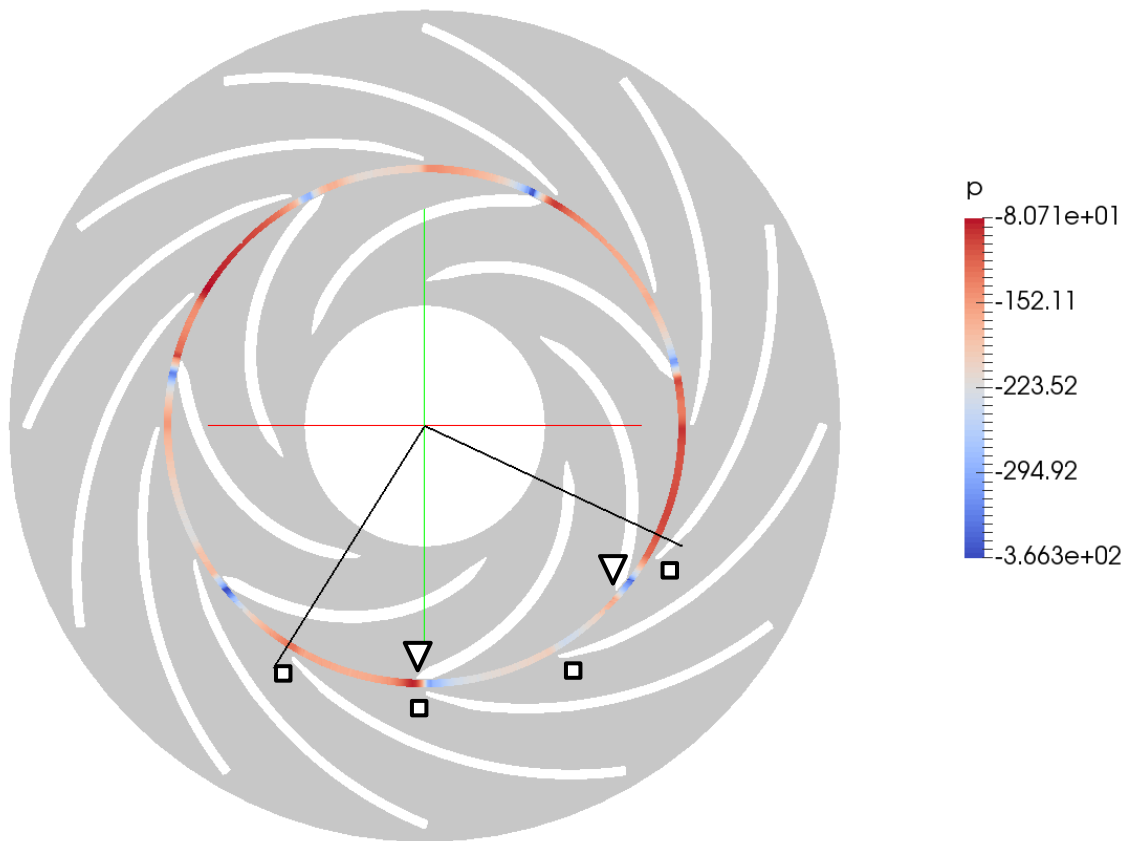


Figura 50: Diferencias cuantitativas en los resultados

Se puede observar en la figura anterior, además de las diferencias en los valores de  $C_p$ , un desfase en el eje X entre los puntos críticos (máximos y mínimos).





Además, se observa en la figura anterior, que las posiciones de los álabes del difusor y del rotor (en los tiempos seleccionados para obtener los datos) no coinciden con el gráfico de los resultados adimensionados. Las líneas negras representan los límites del arco de circunferencia donde se toman los puntos para generar el mismo.

Se puede deducir, que el desfase en el eje X mencionado anteriormente, se debe a este error en la selección de los tiempos de muestreo.

El presente trabajo se puede considerar la base para futuras simulaciones y validaciones de turbomáquinas, que podrán realizarse en tres dimensiones.

## 10. Bibliografía

WHITE, M. Frank. Fluid Mechanics. 4a. ed. 1023 p. ISBN 0-07-283180-4

VERSTEEG, H. K. An introduction to computational fluid dynamics. The finite volumen method. 1a. ed New York: 1995. 267 p. ISBN 0-582-21884-5

UBALDI, M. An experimental Investigation of Stator Induced Unsteadiness on Centrifugal Impeller Outflow

FERNÁNDEZ ORO, J.M. Numerical modeling of hydraulic turbomachines: a historical review.