Ficha Técnica

Conjuntos numéricos. Intervalos. Operaciones en el conjunto de números reales.

Índice de temas:

1. Conjuntos Numéricos

El conjunto $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,\ldots\}$ designa al conjunto de los números naturales. Este conjunto surge por la necesidad que el hombre tenía de contar, por ejemplo, contar para saber cuántos eran sus bienes personales.

Dentro del conjunto de los números naturales está siempre definida la suma y el producto de dos números, ya que al operar entre números naturales el resultado siempre es un número natural. Es decir estas operaciones son cerradas en $\mathbb{N}$

No ocurre lo mismo con la resta y la división ya que el resultado de restar o dividir dos números naturales no necesariamente es un número natural.

Por ejemplo: 3-5 = -2 y $-2 \notin \mathbb{N}$

De igual forma: 2:5 = 0,4 y 0,4 $\notin \mathbb{N}$

Si al conjunto de los naturales le agregamos el cero y los opuestos de los números naturales obtenemos el conjunto de los números enteros. Este conjunto se simboliza $\mathbb{Z}$.

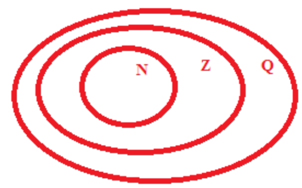
$$\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\ldots\}$$

En este conjunto, además de la suma y el producto entre números enteros, está definida la resta:

3-5=-2 y $-2 \in \mathbb{Z}$

El resultado de restar dos números enteros siempre es un número entero.

No ocurre igual con el cociente: 2:5 = 0,4 y 0,4 $\notin \mathbb{Z}$



Los números racionales surgieron ante la necesidad de expresar divisiones no exactas. Al conjunto de los números racionales se lo simboliza: $\mathbb{Q}$

Estos números se expresan como razones entre números enteros, es decir, que todo número racional se puede escribir como el cociente de dos números enteros: $\frac{a}{b}$ donde $b \neq 0$

Recuerde que la división por 0 no es válida

Ahora 2:5 = 0,4 y $0{,}4 \in \mathbb{Q}$

En este conjunto son cerradas las operaciones de suma, producto, resta y división.

Otra característica que poseen los números racionales es que admiten una expresión decimal finita o periódica. Esta expresión se obtiene al dividir a por b.

Ejemplo: $\frac{1}{2}=0.5$ $\qquad$ $\frac{5}{3}=1.\widehat{6}$ $\qquad$ $-\frac{2}{1}=-2$

¿Podría pensar dos números racionales entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$?

…. Le dejamos un minuto para pensar….

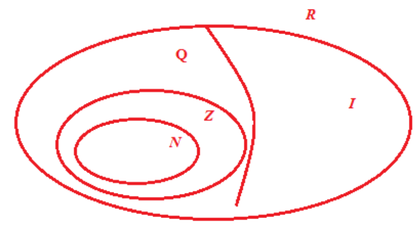
Para encontrar una respuesta posible bastará con hallar el punto medio entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$, es decir $\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2}=1$ y ahora el punto medio entre 1 y cualquiera de los números dados, por ejemplo $\frac{1+\frac{3}{2}}{2}=\frac{5}{4}$.

Esto muestra claramente que entre dos números racionales cualesquiera existen otros infinitos números también racionales; cuando esto ocurre decimos que el conjunto es denso. Por ello es posible que usted haya encontrado otras respuestas.

¿Ocurrirá lo mismo entre dos números enteros o naturales? Piensen números naturales entre 1 y 2 o números enteros entre -1 y 0…

Hasta ahora definimos el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, el de los enteros $\mathbb{Z}$ y el de los números racionales $\mathbb{Q}$. Sin embargo, podemos pensar en números como $\sqrt{2}, \pi, \sqrt[5]{3}$ que además poseen infinitas cifras decimales no periódicas y por lo tanto no pueden expresarse como una razón (o división) de dos números enteros.

$\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots \qquad \pi = 3.1415926\ldots$



Estos números forman parte del conjunto de los números irracionales (no razón), el cual se denota con la letra I y al igual que los racionales forman un conjunto denso.

El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, con el conjunto de los números irracionales I forman el conjunto de los números reales $\Re$, en símbolos $\Re = \mathbb{Q} \cup \mathrm{I}$

Los números reales se pueden representar mediante puntos en la recta numérica.

A cada número real le corresponde un único punto sobre la recta numérica y a cada punto de la recta le corresponde un único número real. Esto nos dice que el conjunto de los números reales es un conjunto completo, la recta numérica queda completa (sin huecos), y denso, entre dos números cualesquiera reales existen otros infinitos.

2. Intervalos

Ejercicio para pensar…

i) Hallar todos los números naturales que son mayores que -3 y menores que 4.
ii) Hallar todos los números enteros que son mayores que -3 y menores que 4.
iii) Hallar todos los números reales que son mayores que -3 y menores que 4.

La respuesta a los dos primeros puntos es muy sencilla:
En el primer caso será $\{1,2,3\}$ y en el ítem ii) la respuesta es $\{-2,-1,01,2,3\}$
En el ítem iii) nos encontramos, debido a la densidad del conjunto de los números reales, con la dificultad de que es imposible expresar la solución por enumeración. Una forma de subsanar dicha dificultad es expresar el conjunto solución por compresión, es decir: $\{x \in \Re : -3 < x < 4\}$. Otra posible forma de expresar la solución es recurrir al concepto de intervalo.

Un intervalo es un subconjunto de los números reales.

Por ejemplo:

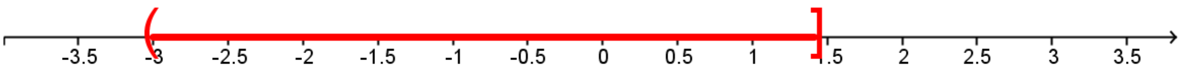
El conjunto $\{x \in \Re /\ a \leq x \leq b\}$ está integrado por los números reales que son mayores o iguales que *a* y menores o iguales que *b*, se escribe $[a,b]$ y se conoce como intervalo cerrado.

El intervalo $[-1,3]$ se grafica de la siguiente manera:

Por su parte, el conjunto $\{x \in \Re /\ a < x < b\}$ está integrado por los números reales entre *a* y *b*, se escribe (a, b) y se conoce como intervalo abierto.
Por ejemplo el intervalo
$\left(\frac{1}{2}, 5\right)$, se grafica:

Utilizamos corchetes "[" "] "para indicar que el extremo del intervalo está incluido en el conjunto y utilizamos paréntesis "(" ")" para indicar que el extremo no pertenece al conjunto.
¿Cómo expresarían el conjunto $\{x \in \Re / -3 < x \leq \sqrt{2}\}$ utilizando notación de intervalo?

¡Perfecto! $\left(-3, \sqrt{2}\right]$ Podemos decir que dicho intervalo es abierto a izquierda o cerrado a derecha.



Necesitamos también considerar los conjuntos del tipo:
A= $\{x \in \Re /\ x \leq b\}$
B= $\{x \in \Re /\ x < b\}$
C= $\{x \in \Re /\ x \geq a\}$
D= $\{x \in \Re /\ x > a\}$

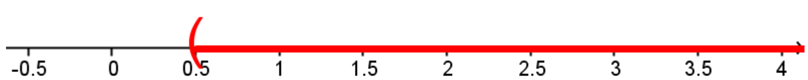
Dichos conjuntos también son intervalos y se escriben
$A = (-\infty, b]$, $B = (-\infty, b)$, $C = [a, +\infty)$ $D = (a, +\infty)$
Ejemplos:

$(-\infty, 4]$

$(-\infty, 2)$

$[-3, +\infty)$

$(0.5\ ,\ +\infty)$



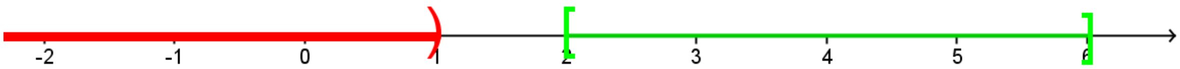
Recordemos ahora algunas operaciones entre intervalos.

La **intersección de intervalos** es un nuevo intervalo formado por los números que pertenecen a la vez a ambos conjuntos.
Veamos el siguiente ejemplo: $(-1\ 2) \cap [-3, 0]$

El conjunto solución es aquel que queda pintado en ambos colores, es decir el intervalo $(-1,0]$.

Notemos que el extremo -1 no pertenece a la intersección debido a que no pertenece al primer intervalo, pero, por el contrario, 0 pertenece al intervalo solución pues pertenece a la vez a ambos conjuntos. Por este motivo, el intervalo es cerrado por derecha.

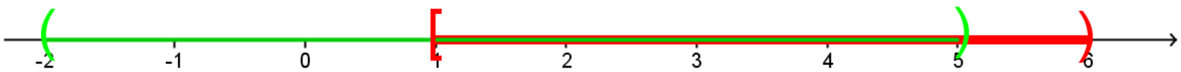
Ejemplo: $(-\infty,1)\cap[2,6]$



En el dibujo podemos ver que no existen elementos que pertenezcan a ambos conjuntos a la vez por lo cual la intersección es vacía y lo escribimos $(-\infty,1)\cap[2,6]=\phi$

La **unión de intervalos** es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a un intervalo o al otro (o a ambos).

Ejemplo: $[1,\ 6)\cup(-2,\ 5)$



En este caso, los elementos que pertenecen al menos a uno de los dos intervalos forman el intervalo $(-2,6)$

3. Operaciones y propiedades

Recuerde…

Propiedades de los números reales para la suma y la multiplicación.

1. Propiedad conmutativa para la suma y la multiplicación
   $a+b=b+a$ $\qquad\qquad$ $a.b=b.a$
2. Propiedad asociativa de la suma y de la multiplicación
   $(a+b)+c=a+(b+c)$ $\qquad\qquad$ $(a.b).c=a.(b.c)$
3. Propiedad distributiva: $a.(b+c)=a.b+a.c$

La propiedad distributiva será muy útil cuando trabajemos con ejercicios donde aparezcan letras y números.

Como las propiedades enunciadas valen para toda terna de números reales a, b y c, en particular vale también para el caso en que alguno sea negativo. Ahora bien como la resta a-b se define como la suma de a+ (-b), podemos ver que las propiedades anteriores también son válidas para la resta de números reales.

De la misma forma la división puede definirse a partir de la multiplicación de la siguiente manera: $\frac{a}{b}=a.\frac{1}{b}$ donde $\frac{1}{b}$ representa el número inverso de b y $b\neq 0$

Veamos otras propiedades relativas a los números reales:

Propiedades de los números reales

4. $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ siempre que $b\neq 0$ y $d\neq 0$
5. $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$ siempre que $b\neq 0$, $c\neq 0$ y $d\neq 0$
6. $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ siempre que $b\neq 0$
7. $\frac{a.c}{b.c}=\frac{a}{b}$ siempre que $b\neq 0$, $c\neq 0$

La última propiedad es muy importante debido a que nos da las condiciones para poder simplificar
Por ejemplo:

$\frac{\cancel{(x+1)}4}{5\cancel{(x+1)}}=\frac{4}{5}$ ¡Está bien simplificado!

$\frac{\cancel{(x+1)}+4}{5\cancel{(x+1)}}=\frac{4}{5}$ ¡Está **MAL** simplificado!

Puesto que en el numerador no hay un producto sino una suma.

Analicemos algunos ejemplos para aplicar estas propiedades:

Ejemplo 1:

Calcular $\left[\frac{4}{3}:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right]:\left[\left(\frac{2}{5}+1\right).5\right]$

Iniciaremos los cálculos indicando en cada paso qué propiedad fuimos aplicando. Ustedes pueden seguir los pasos en sus cuadernos

Resolvemos la resta sacando denominador común $\left(\frac{3}{6}-\frac{2}{6}\right)=\frac{1}{6}$

Aplicamos propiedad distributiva: $\left(\frac{2}{5}+1\right).5=\frac{2}{5}.5+1.5=2+5=7$ (*)

$$\left[\frac{4}{3}:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right]:\left[\left(\frac{2}{5}+1\right).5\right]=\left[\frac{4}{3}:\left(\frac{1}{6}\right)\right]:\left[\left(\frac{2}{5}+1\right).5\right]=\left[\frac{4}{3}.6\right]:\left[\left(\frac{2}{5}+1\right).5\right]=\left[\frac{24}{3}\right]:\left[\left(\frac{2}{5}+1\right).5\right]=\left[\frac{24}{3}\right]:7=\frac{24}{3}.\frac{1}{7}=\frac{24}{21}$$

$\left[\frac{4}{3}:\left(\frac{1}{6}\right)\right]=\frac{4}{3}.6$

(*) En este ejemplo quizás se podría haber evitado la aplicación de esta propiedad, debido a que se podría haber resuelto en primer lugar la suma $\left(\frac{2}{5}+1\right)$ y multiplicado al resultado por 5. Sin embargo la propiedad distributiva será indispensable para operar en expresiones de la forma $\left(\frac{2}{5}+x\right).5$ con las que trabajaremos más en detalle en la próxima unidad.

Ejemplo 2:

Una de las expresiones que siguen **no** es equivalente a $\frac{1}{3}a^3+a^4$, encuéntrela y expliquen por qué no son expresiones equivalentes.

i) $\frac{a^3}{3}+a^4$ ii) $\frac{a^3+a^4}{3}$ iii) $a^3\left(\frac{1}{3}+a\right)$ iv) $\frac{a^3+3a^4}{3}$

Resolución:

No olvidemos que:

El producto tiene prioridad sobre la suma y la resta.

Es por esto que $\frac{1}{3}a^3+a^4$ debe ser interpretado como $\left(\frac{1}{3}a^3\right)+a^4$ y **no** como $\frac{1}{3}\left(a^3+a^4\right)=\frac{a^3+a^4}{3}$

Por lo tanto la respuesta correcta es la ii)

¿Cómo justifica las restantes equivalencias?

Ejemplo 3:

Indique si las siguientes igualdades son válidas en los conjuntos indicados y justifiquen:

i) $\frac{5x+x^2}{x}=5+x$ para todo $x \neq 0$

ii) $\frac{1}{5+x}=\frac{1}{5}+\frac{1}{x}$ para todo $x \neq 0$ y $x \neq -5$

iii) $\frac{8+x^2}{3x}=\frac{8+x}{3}$ para todo $x \neq 0$

Resolución:

i) $\frac{5x+x^2}{x}=5+x$ para todo $x \neq 0$

En la expresión $\frac{5x+x^2}{x}$ podemos distribuir el denominador respecto de la suma en el numerador: $\frac{5x+x^2}{x}$ = $\frac{5x}{x}+\frac{x^2}{x}$

Si ahora realizamos las simplificaciones correspondientes, propiedad 7 de números reales, $\frac{5x}{x}+\frac{x^2}{x}=5+x$ y por lo tanto la igualdad es cierta, pero sólo para $x \neq 0$

ii) $\frac{1}{5+x}=\frac{1}{5}+\frac{1}{x}$ para todo $x \neq 0$ y $x \neq -5$

Es importante recordar que **no es posible distribuir el numerador respecto de una suma o resta en el denominador, es decir** $\frac{1}{(5+x)} \neq \frac{1}{5}+\frac{1}{x}$

Verificación: $\frac{1}{5}+\frac{1}{x}=\frac{x+5}{(5x)} \neq \frac{1}{(5+x)}$ **Por lo tanto, la igualdad es inválida.**

iii) $\frac{8+x^2}{3x}=\frac{8+x}{3}$ para todo $x \neq 0$

Un **error** bastante frecuente en la expresión $\frac{8+x^2}{3x}$ es simplificar el x que se encuentra en el denominador con el x^2 que se encuentra en el numerador…

Esto está mal debido a que, si analizamos la regla $\frac{a.c}{b.c}=\frac{a}{b}$, podemos ver que tanto en el numerador como en el denominador está escrito como producto y en ambos casos uno de los factores de ese producto es c, es por esto que dicho factor puede cancelarse obteniendo así el segundo término de la igualdad.

En la próxima unidad trabajaremos más en detalle con este tipo de expresiones.

Trabajemos ahora con exponentes y raíces:

Definición:

Si a es un número real no nulo, entonces: $a^0 = 1$

Si a es cualquier número real y n es un número natural, entonces:

$$a^n = \underbrace{a.a.a...a}_{n\,veces}$$

Además si $a \neq 0$ *entonces* $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Propiedades de las potencias

Sean a y b números reales y n y m naturales, entonces

- *Producto de potencias de igual base*: $a^n.a^m = a^{n+m}$
- *Potencia de potencia:* $(a^n)^m = a^{n.m}$
- *Cociente de potencias de igual base* $\frac{a^n}{a^m}. = a^{n-m}$ siempre que $a \neq 0$
- *Distributiva de la potencia respecto del producto:* $(a.b)^n = a^n.b^n$
- *Distributiva de la potencia respecto del cociente:* $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$ siempre que $b \neq 0$

¡Cuidado! La potencia **no** es distributiva respecto de la suma y la resta $(a+b)^2$ **no es equivalente a** $a^2 + b^2$

Ante la situación de calcular $(a+b)^2$ o $(a+b)^2$ debemos recordar:

Binomio al cuadrado: $(a+b)^2 = a^{2.} + 2ab + b^2$ **(*)**

Binomio al cubo: $(a+b)^3 = a^{3.} + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(*) Esta es la expresión a la que debieron llegar en el ejercicio de área planteado el inicio de la unidad. Es importante observar que si bien en dicho ejemplo a y b representaban constantes positivas, pues eran las medidas de los lados, la fórmula de binomio cuadrado en válida para todo número real a y b.

Recuerde que pueden obtener la expresión $(a+b)^2 = a^{2.} + 2ab + b^2$ *, expresando* $(a+b)^2$ *como* $(a+b).(a+b)$ *y realizando las distributivas correspondientes.*

Veamos un ejemplo donde aplicar lo aprendido:

Ejemplo 4:

Realice las siguientes operaciones:

i) $\dfrac{x^{2n-1}}{x^{2-3n}}$. con $x \neq 0$ ii) $\dfrac{x^{-4}y^5}{x^2.y^3}$ con $x \neq 0$ e $y \neq 0$

Resolución:

i)

Cociente de potencias de igual base

$$\frac{x^{2n-1}}{x^{2-3n}} = x^{2n-1-(2-3n)} = x^{2n-1-2+3n} = x^{5n-3}.$$

Producto de fracciones

$x^{-6} = \dfrac{1}{x^6}$

$$\frac{x^{-4}y^5}{x^2.y^3} = \frac{x^{-4}}{x^2}.\frac{y^5}{y^3} = x^{-4-2}.y^{5-3} = x^{-6}.y^2 = \frac{y^2}{x^6}$$

Cociente de potencias de igual base

Definición:

Si a, b son números reales y n es un número natural impar, entonces: $\sqrt[n]{a} = b$ si y solo si $a = b^n$

Si a y b son números reales **positivos** o nulos y n es un número natural par, entonces: $\sqrt[n]{a} = b$ si y solo si $a = b^n$

Veamos algunas propiedades…

- $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ si $b \neq 0$
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Recordar que si n es par entonces a y b deben ser reales mayores o iguales a 0

¡Importante!: Las operaciones entre números reales tienen solución única: $\sqrt{16} = 4$ y **no** ± 4

Si, en cambio, nos pidieran encontrar el o los número/s que elevado/s al cuadrado dan 16, o sea buscar: x tal que $x^2 = 16$, la respuesta correcta es -4 y 4, pues ambos números verifican que $(4)^2 = 16$ y $(-4)^2 = 16$.
En este caso no estamos resolviendo la operación “raíz cuadrada” sino la ecuación $x^2 = 16$. Este tema será retomado más adelante en nuestra unidad de ecuaciones.

4. Módulo o valor absoluto de un número real

Se define el módulo de un número real x como la distancia de x al cero.

<u>Notación</u>: |x|

Entonces:

<u>Definición de módulo</u>

|x|=x, si x es positivo

|x|=-x, si x es negativo

Es decir:

|3|= 3
|-5|= 5